Budowa i Ewolucja Gwiazd
II rok astronomii
Lista nr 2

1. Wyprowadź dla gazu doskonałego zależność $C_p - C_V = R$ oraz równanie adiabaty $TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}$, $\gamma = C_p/C_V$.

2. Wychodząc z rozkładu Maxwella w postaci

$$f(v)\, dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2\, dv$$

pokazać, że rozkład ten według energii cząstek ma postać

$$f(E)\, dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-E/kT} \sqrt{E}\, dE,$$

natomiast według pędów

$$f(p)\, dp = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (2mkT)^{-3/2} e^{-p^2/2mkT} p^2\, dp.$$

3. Wychodząc z rozkładu Maxwella pokazać, że $\int_0^\infty f(v)\, dv = 1$ oraz $v_p < \overline{v} < v_{rms}$, gdzie v_p oznacza prędkość najbardziej prawdopodobną, $\overline{v}$ prędkość średnią, a v_{rms} pierwiastek średniej kwadratu prędkości.

4. Pokazać, że wskaźniki barwy są niezależne od odległości.

5. Zakładając, że jasność gwiazdy można opisać przybliżeniem Wiena (np. równanie 2.16 w książce Christensena-Dalsgaarda), wyrysować

   (a) $U - B$ oraz $B - V$ w funkcji temperatury,

   (b) $U - B$ w funkcji $B - V$.

   Wskazówka: założyć, że funkcja odpowiedzi danego filtru jest dana przez deltę Diraca $S_{i,\lambda} = \delta(\lambda - \lambda_i)$, gdzie $\lambda_U = 3700\,\text{Å}$, $\lambda_B = 4450\,\text{Å}$, $\lambda_V = 5500\,\text{Å}$. Odpowiednie stałe wyznaczyć zakładając $(U - B)_\odot = 0.13$, $(B - V)_\odot = 0.65$ oraz temperaturę Słońca na powierzchni $T = 5778\,\mathrm{K}$.

6. Dla 100 najjaśniejszych gwiazd wyznaczyć T_{eff} i $\log L/L_\odot$ i umieścić je na diagramie HR. Odpowiednie dane znaleźć w bazie danych SIMBAD, natomiast poprawki bolometryczne przyjąć z modeli Kurucza (http://kurucz.harvard.edu).

7. Na diagramie HR z poprzedniego zadania nanieść linie stałych promieni gwiazd. Omówić jak zmienia się R wzdłuż ciągu głównego oraz jakie są wartości R dla olbrzymów i nadolbrzymów.

8. Korzystając z odpowiedniego równania wykreślić funkcję $M_r/M(r/R)$, gdzie M oznacza masę całkowitą, a R promień całkowity, dla gęstości $\rho(r)$ zadanej formułami:
   (a) $\rho(r) = \text{const}$,
   (b) $\rho(r) \sim r^{-1}$,
   (c) $\rho(r) \sim r^{-2}$,
   (d) $\rho(r) \sim \left[r^2 (r+1)\right]^{-1}$.

9. Korzystając z równania równowagi hydrostatycznej uzasadnić prawo Archimedesa.

10. Korzystając z równania równowagi hydrostatycznej i równania stanu gazu doskonałego wyprowadź oszacowanie na temperaturę w centrum gwiazdy:
$$T_c \approx \frac{3}{8} G \frac{\mu_c m_u}{k} \frac{M}{R}.$$
Oszacuj P_c (wzór 15 na wykładzie) i T_c dla modeli ZAMS (plik z danymi na stronie www prowadzącego). Załóż średni ciężar cząsteczkowy dla całkowicie zjonizowanej materii wodorowej, $\mu_c = 0.5$. Wartości T_c porównaj z wartościami dokładnymi z pliku.

11. Rozwiązać równanie równowagi hydrostatycznej dla jednorodnej kuli ($\rho = \text{const}$) o masie M i promieniu R przy założeniu, że $P(R) = 0$. Pokazać, że ciśnienie w środku kuli wynosi $P(0) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}$. Jaki wynik uzyskamy, jeśli gęstość będzie liniowo malejącą funkcją promienia, tj. $\rho(r) = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)$? W szczególności, jaki jest związek między ρ_c a średnią wartością gęstości, $\langle \rho \rangle = \frac{3M}{4\pi R^3}$?

Wojciech Szewczuk