Ćwiczenia z Astronomii Pozagalaktycznej
Lata IV i V astronomii
Lista nr 4

1. Pokazać, że w przypadku sferycznie symetrycznego rozkładu masy (gęstość $\varrho = \varrho(r)$) energia potencjalna $E_{\rm pot}$ kuli o masie M wynosi

$$E_{\rm pot} = \int_M dMGM_r,$$

gdzie M_r to masa zawarta w kuli o promieniu r.

2. Tzw. warstwa izotermiczna ma rozkład gęstości $\varrho(x, y, z) = \varrho_0 \,\mathrm{sech}^2(z/h)$. Wyliczyć potencjał $\Phi(x, y, z)$ pola tworzonego przez tę warstwę. Wskazówka: policzyć drugą pochodną funkcji $y = \ln(\cosh(x))$.

3. Rozkład gęstości ϱ warstwy izotermicznej zależy od potencjału Φ w następujący sposób $\varrho \sim \exp(-\Phi/\sigma^2)$, gdzie σ to dyspersja prędkości. Wiedząc, że $\varrho_0 = 0.15$ $M_\odot/\mathrm{pc}^3$ i $h = 100$ pc, wyznaczyć dyspresję prędkości σ uzgadniając wynik poprzedniego zadania z podaną zależnością.

4. Wyznaczyć rozkład gęstości $\varrho(r)$ dla potencjału Plummer'a

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \qquad b = \mathrm{const.}$$

Pokazać, że dla $r \to \infty$ całkowita masa obiektu wytwarzającego ten potencjał wynosi M.

5. Dobrym przybliżeniem dysku galaktycznego jest (nieskończenie) cienka warstwa o gęstości powierzchniowej $\Sigma(x, y)$. Wyznaczyć potencjał $\Phi(z)$ jednorodnej warstwy o gęstości powierzchniowej $\Sigma(x, y) = \Sigma_0 = \mathrm{const.}$ Wskazówka: wyraz nieskończony całkowania potraktować jako stałą. Dlaczego można tak zrobić?

6. Dysk Kuzmina to cienka niejednorodna warstwa, której potencjał Φ wynosi

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + (|z| + a)^2}}.$$

Wyznaczyć rozkład gęstości powierzchniwej $\Sigma(x, y)$ tej warstwy, a następnie obliczyć masę zawartą w warstwie w kole o środku $(0, 0, 0)$ i promieniu R.

Grzegorz Kopacki