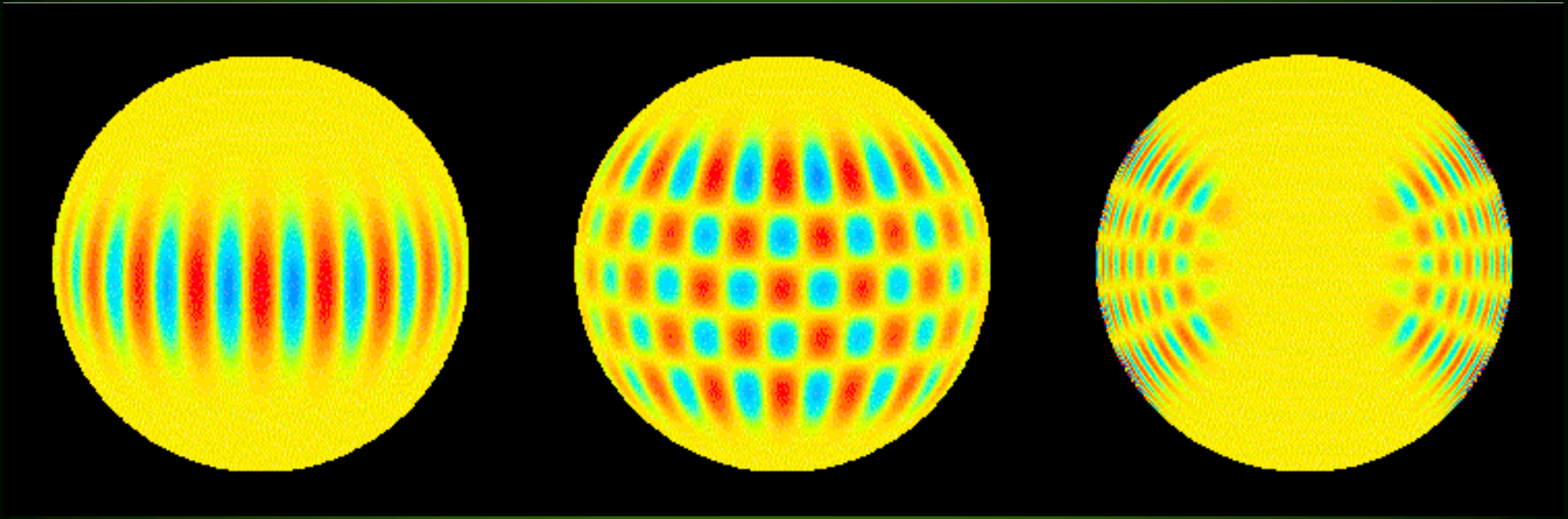


PULSACJE GWIAZDOWE

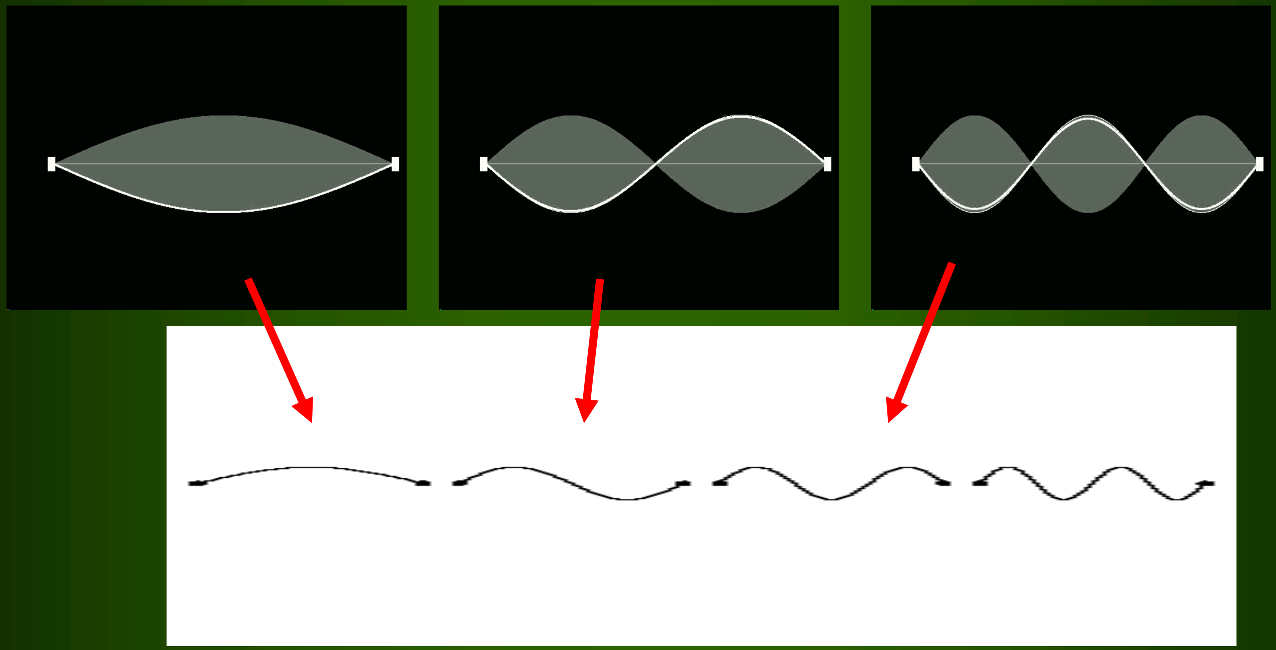
semestr zimowy 2019/2020

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

PUŁAPKOWANIE OSCYLACJI

Fale akustyczne i grawitacyjne propagują się w kierunku radialnym tylko w określonych obszarach.

Pulsacje nieradialne są falami stojącymi, które tworzą się przez odbicie od granic obszaru propagacji.



Don Kurtz

ANALIZA LOKALNA

Zakładamy Φ'=0 i wprowadzamy nowe zmienne

$$\tilde{\xi} \equiv r^2 \xi_r \exp\left(-\int_0^r \frac{g}{c^2}\right)$$

$$\tilde{\eta} \equiv \frac{p'}{\rho} \exp\left(-\int_0^r \frac{N^2}{g}\right) = \omega^2 r \xi_h \exp\left(-\int_0^r \frac{N^2}{g}\right)$$

Mamy równania pulsacyjne w kanoniczne postaci

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dr} = h(r)\frac{r^2}{c^2}\left(\frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1\right)\tilde{\eta}$$

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dr} = \frac{1}{r^2 h(r)}\left(\omega^2 - N^2\right)\tilde{\xi}$$

$$h(r) \equiv \exp\left[\int_0^r \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c^2}\right) dr\right] > 0$$

Zakładamy, ze współczynniki tych równań
są **stałe** na krótkiej skali odległości r !

Wówczas dostaniemy

$$\tilde{\xi}(r),\ \tilde{\eta}(r) \propto \exp(\mathrm{i}k_r r)$$

$$k_r^2 = \frac{(\omega^2 - S_\ell^2)(\omega^2 - N^2)}{\omega^2 c^2}$$

relacja dyspersyjna - związek między liczbą falową i częstotliwością stojące fale akustyczne

stojące fale grawitacyjne

Dla $\omega^2 > S_\ell^2, N^2$ lub $\omega^2 < S_\ell^2, N^2 \rightarrow k_r$ jest rzeczywiste i $k_r^2 > 0$
i fala może się propagować w kierunku radialnym.

Dla $S_\ell^2 > \omega^2 > N^2$ lub $S_\ell^2 < \omega^2 < N^2 \rightarrow k_r$ jest urojone i $k_r^2 < 0$
i fala jest tłumiona (znoszona).

Uwzględniając wyrażenie na horyzontalna liczbę falową

$$k_h^2 = \ell(\ell+1)/ r^2 = S_\ell^2/c^2$$

Równanie dyspersyjne przepisujemy w postaci

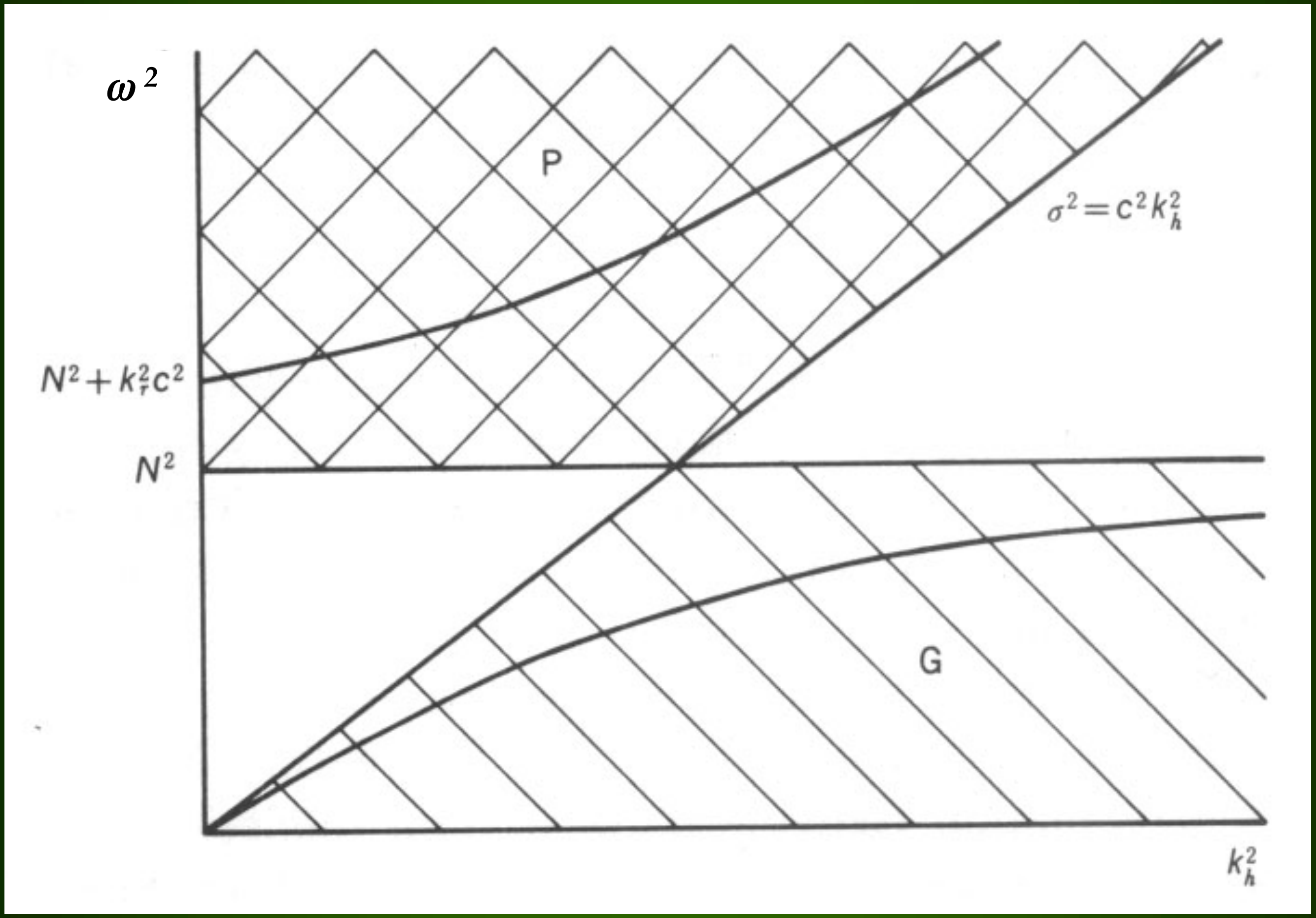
$$\boxed{\omega^4 - (N^2 + k^2c^2)\omega^2 + N^2k_h^2c^2 = 0}$$

gdzie

$$k^2 = k_r^2 + k_h^2$$

DIAGRAM DIAGNOSTYCZNY

powyższa zależność na płaszczyźnie (k_h^2, ω^2)



- Dla $k_r^2 \neq 0$ mamy dwie hiperbole.
- Dla $k_r^2 = 0$ mamy $\omega^2 = N^2$ i $\omega^2 = k_h^2 c^2$ (linie asymptotyczne).

Unno et al. 1989

Relacje dyspersyjne dla prostych przykładów ruchu falowego

$\omega^2 = c^2 |k|^2$ - mody p (płaska fala dźwiękowa)

$\omega^2 = N^2 k_h^2 / k^2$ - mody g (wewnętrzne fale wypornościowe)

$\omega^2 = g_0 k_h$ - mody f (powierzchniowe fale wypornościowe, $\mathrm{div}\xi \cong 0$)

Nieradialne oscylacje mają charakter dualny, który zależy od częstotliwości i horyzontalnej liczby falowej.

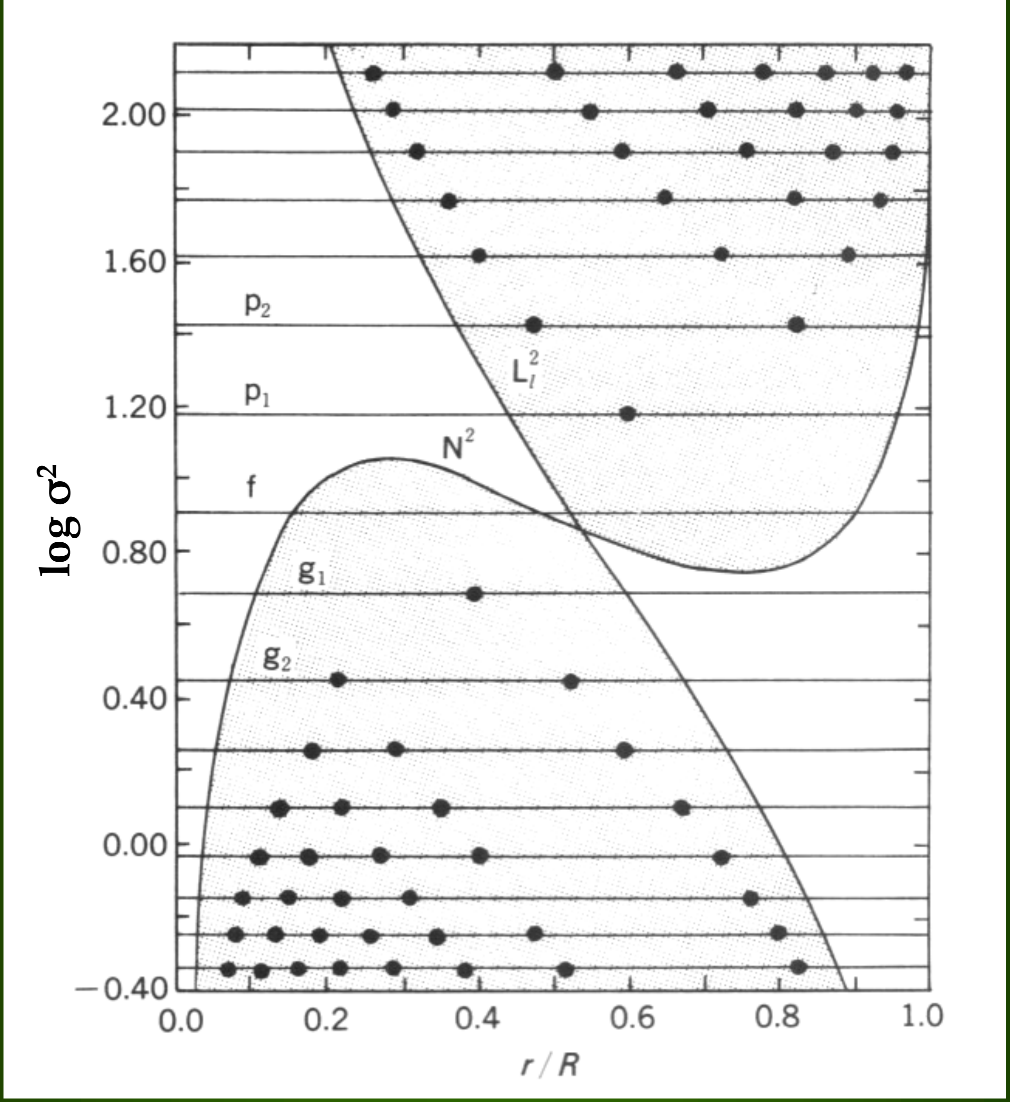
k_r zwiększa się

częstotliwości modów akustycznych rosną

częstotliwości modów grawitacyjnych maleją

DIAGRAMY PROPAGACJI

DIAGRAMY PROPAGACJI DLA POLITROPY n=3 i ℓ=2



Unno et al. 1989

Zachowanie S_ℓ^2 mało się zmienia od gwiazdy do gwiazdy.

Dla większych ℓ, krzywa S_ℓ^2 przesuwa się w górę:

$$S_{\ell+1}^2/S_\ell^2=(\ell+2)/\ell$$

Zachowanie N^2 jest bardzo czułe na zmiany ewolucyjne.

Dla gazu doskonałego mamy

$$N^2 \simeq \frac{g^2\rho}{p}(\nabla_{\rm ad} - \nabla + \nabla_\mu), \qquad \nabla_\mu = \frac{d\ln\mu}{d\ln p}, \qquad p = p_{gas}$$

Jeśli mamy dodatkowo ciśnienie promieniowanie, to

$$N^2 \simeq \frac{g^2\rho}{p}\left[\frac{4-3\beta}{\beta}(\nabla_{\rm ad} - \nabla) + \nabla_\mu\right], \qquad \beta = \frac{p_{gas}}{p}, \qquad p = p_{gas} + p_{rad}$$

∇_μ - gradient składu chemicznego

μ - średni ciężar cząsteczkowy

NIESTABILNOŚĆ KONWEKTYWNA

$\nabla > \nabla_{ad}$ - kryterium Schwarzschilda

$N^2 < 0$ - kryterium Ledoux

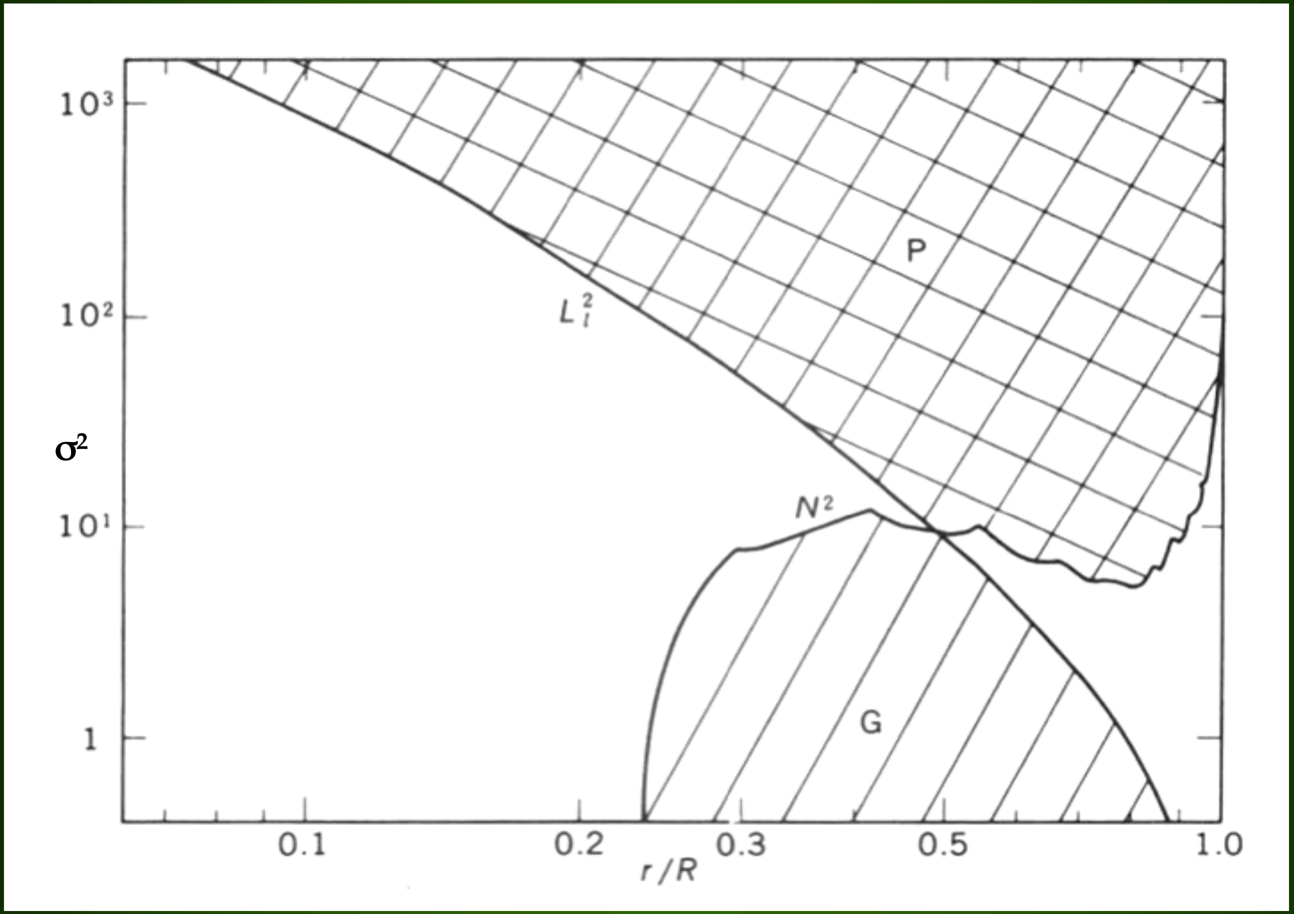
dla $\nabla_{\mu}=0$ kryteria te są równoważne

Konwekcja i ∇_{μ} znacznie modyfikują N^2.

N^2 dla modelu ZAMS oraz zmiany ewolucyjne N^2 są inne dla gwiazd masywnych ($M > 1.3\ M_{\odot}$) i małomasywnych ($M < 1.3\ M_{\odot}$).

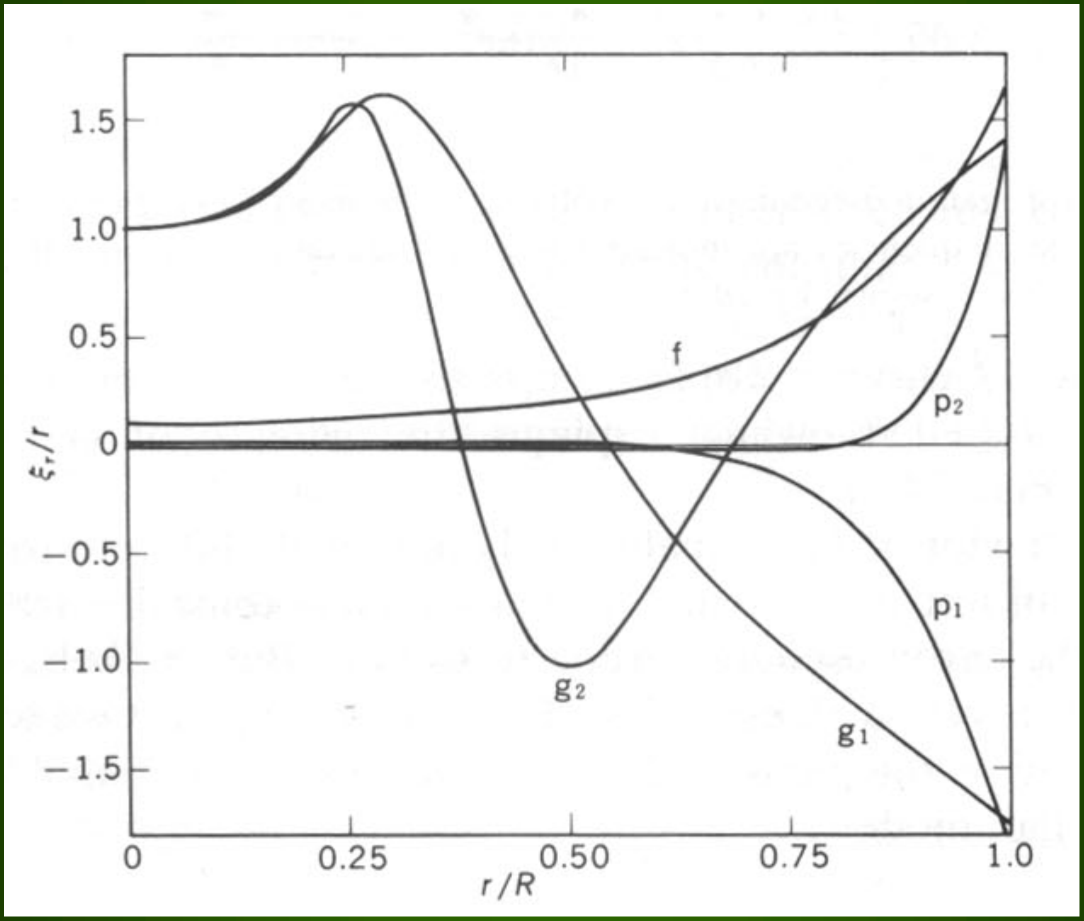
◎ MASYWNA GWIAZDA CIĄGU GŁÓWNEGO

M=10 $M_{\odot}$, ZAMS (X=0.7), ℓ=2 (typ β Cep)



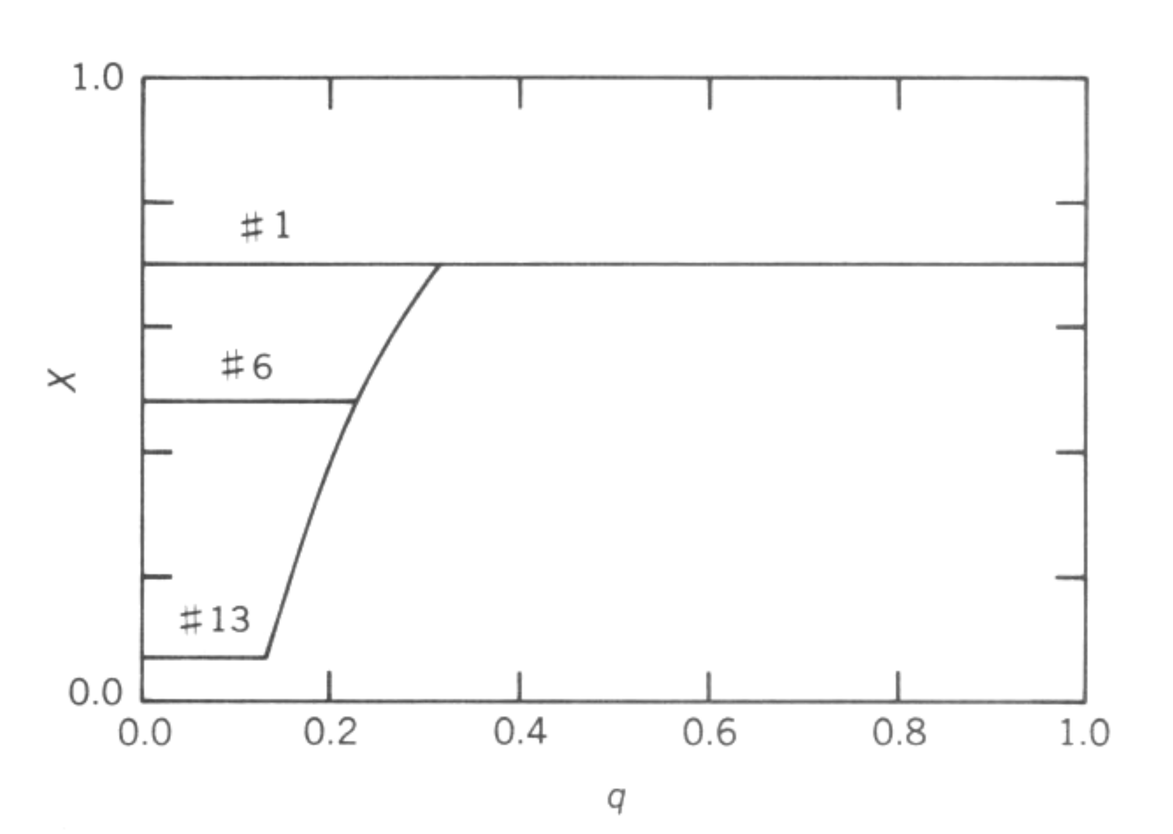
Unno et al. 1989

Funkcje własne przesunięcia radialnego dla ℓ=2



Unno et al. 1989

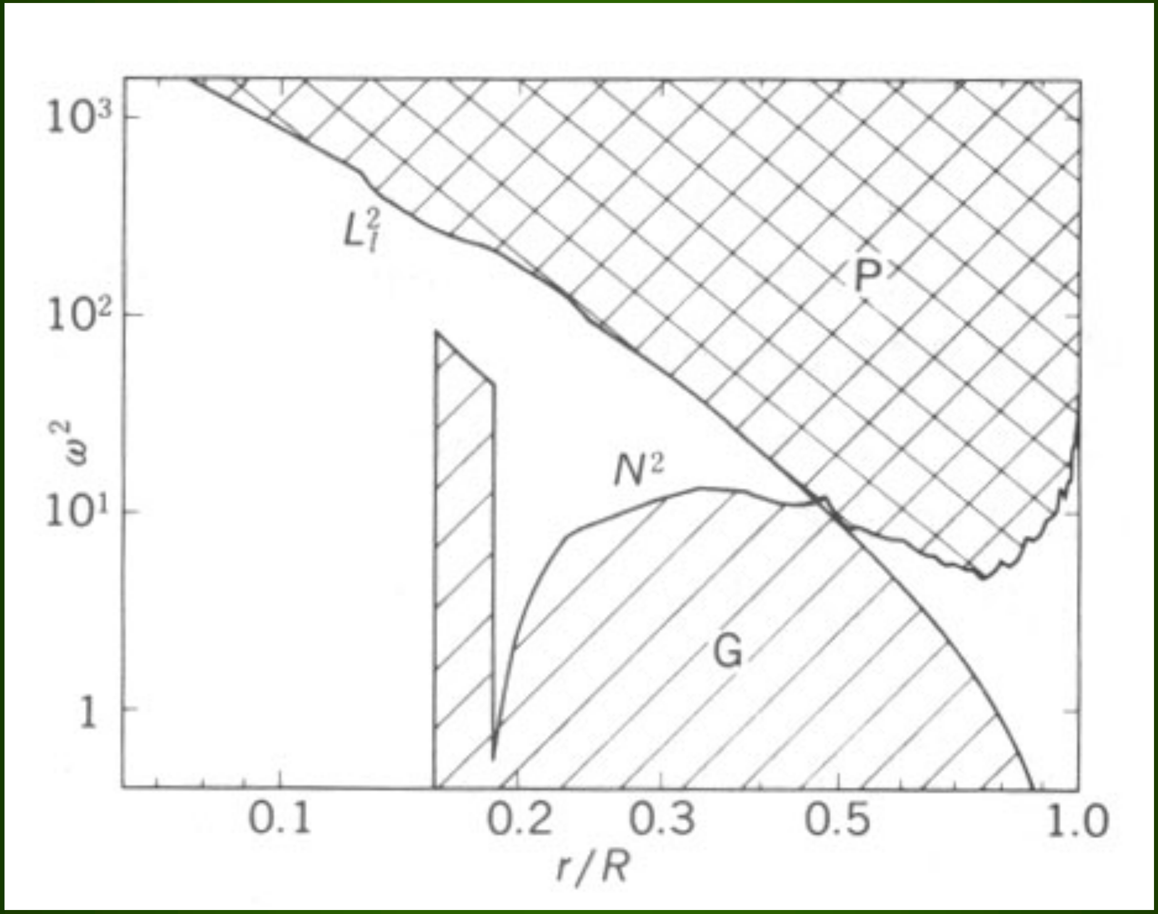
Rozkład obfitości wodoru we wnętrzu gwiazdy o masie M=10 $M_{\odot}$ na różnych etapach ewolucji



Unno et al. 1989

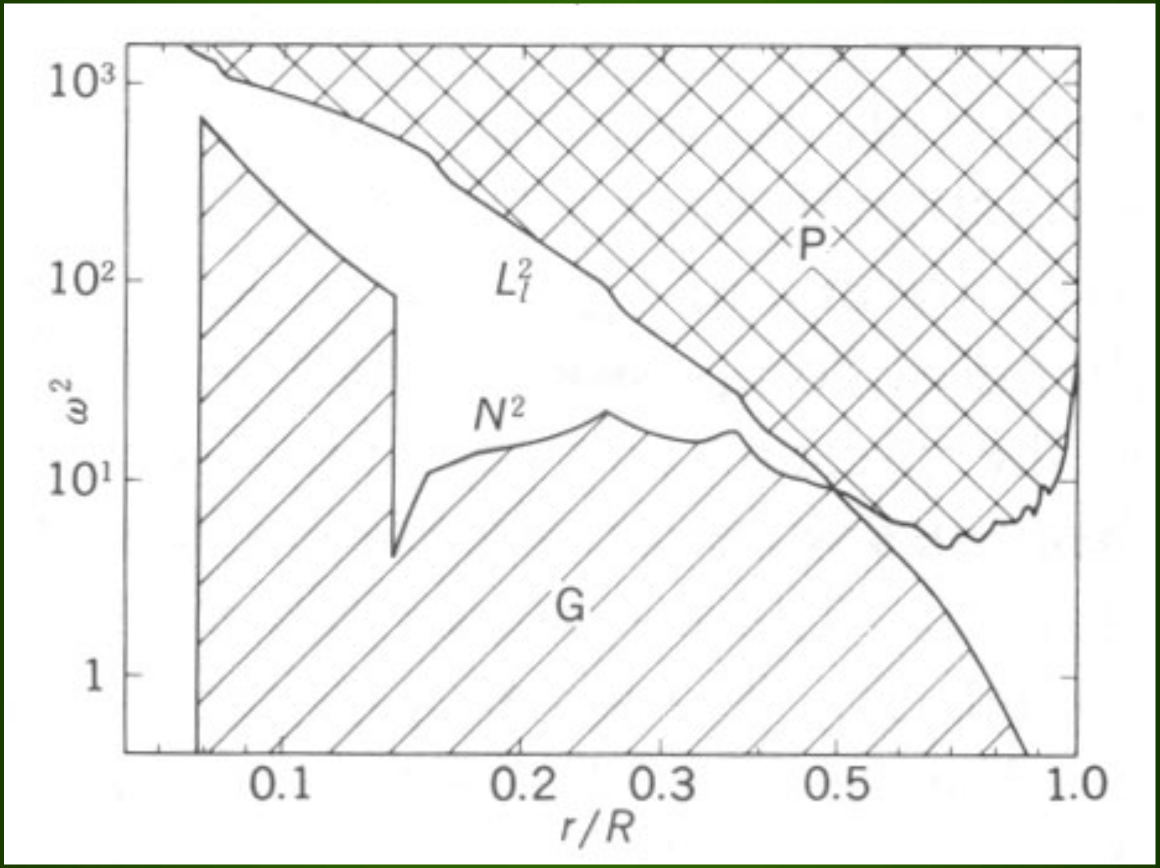
kurczące się jądro pozostawia obszar chemicznie niejednorodny $\Rightarrow$ N^2 rośnie

M=10 $M_\odot$, X_c=0.48



Unno et al. 1989

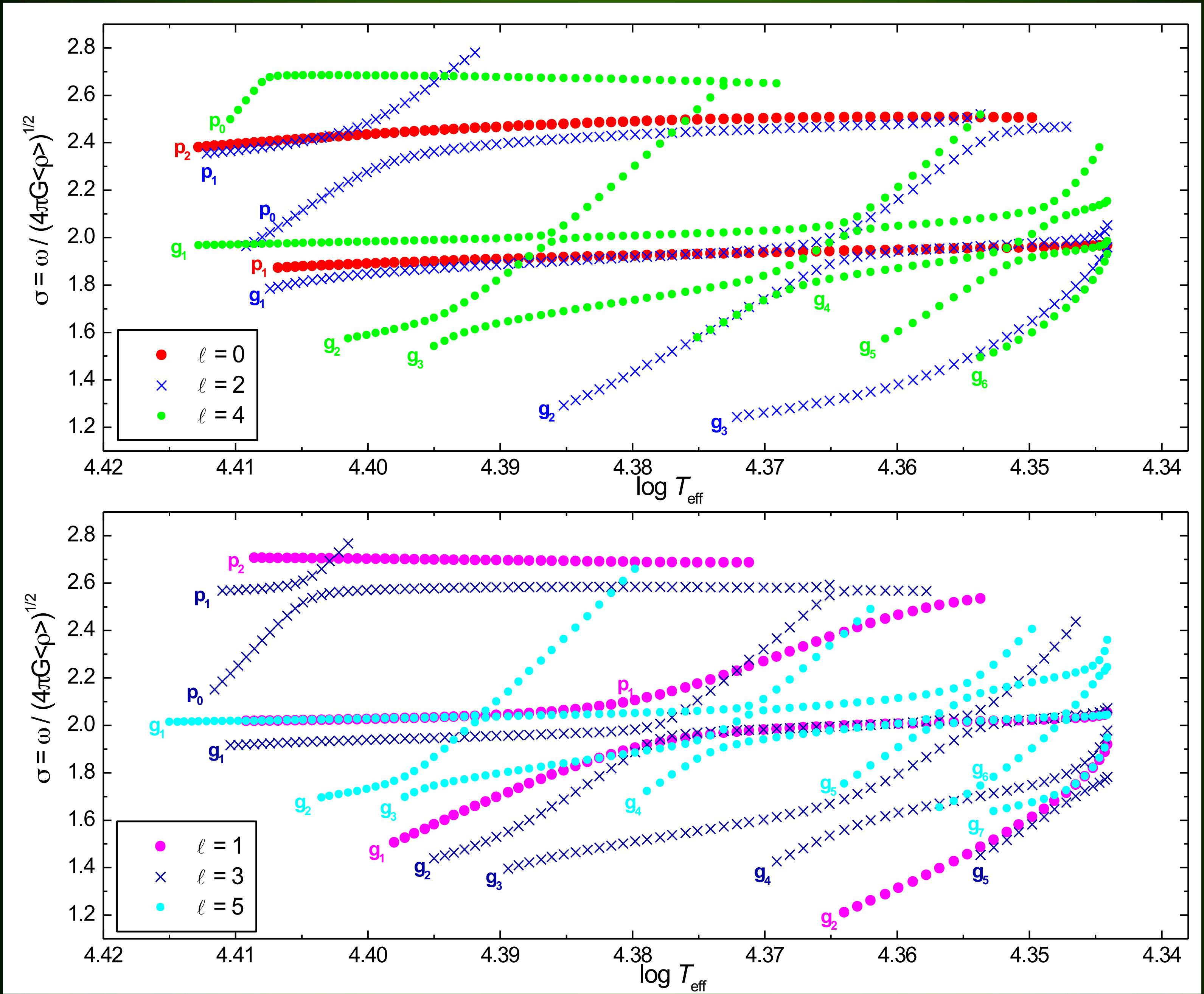
M=10 $M_\odot$, X_c=0.07



Unno et al. 1989

$$\boxed{\nabla_\mu \nearrow \;\Rightarrow\; N^2 \nearrow \;\Rightarrow\; \omega_g \nearrow}$$

Ewolucja σ na MS dla gwiazdy o masie M=12 $M_\odot$



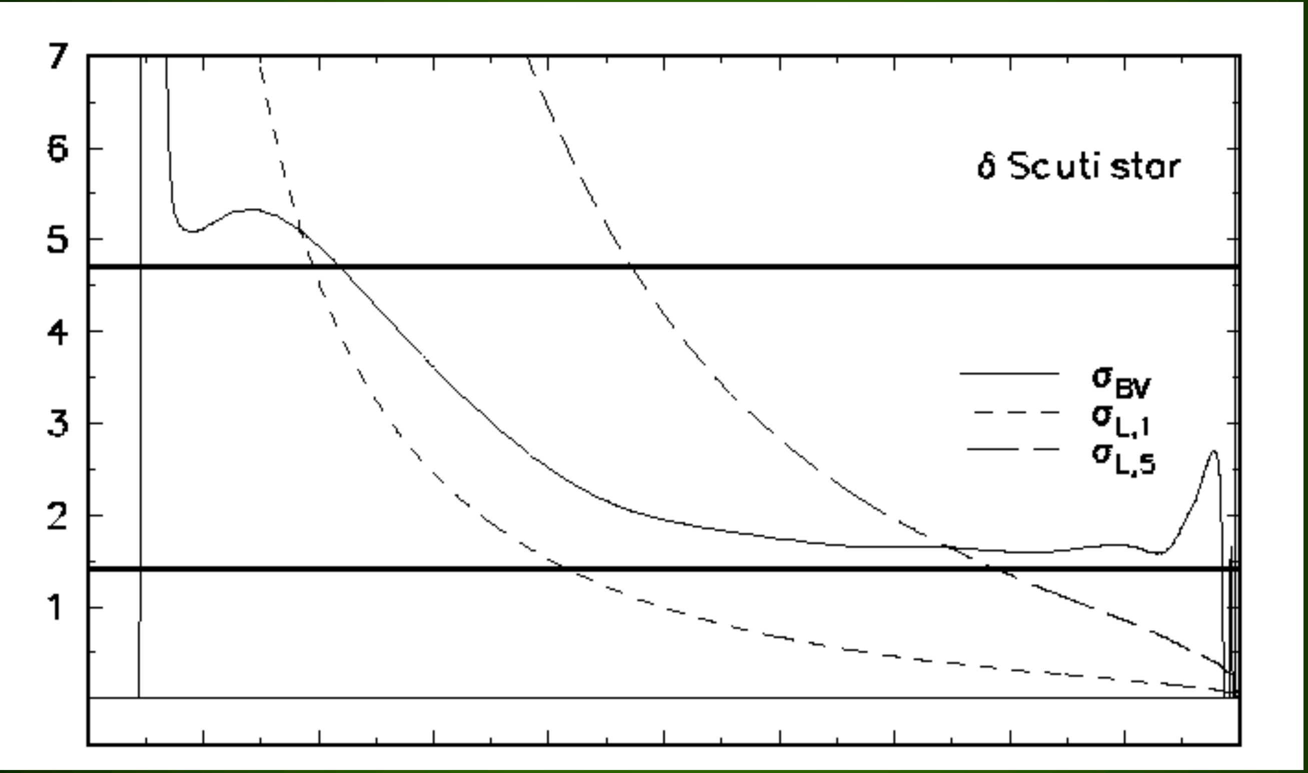
Mody radialne: σ=const, bo P$\sqrt{\rho}$=const

Mody nieradialne:

1) Zjawisko „avoided crossing" (unikanie „przecięć") - efekt oddziaływania między modami, dwa mody nie mogą mieć tej samej częstotliwości.

2) przełączanie modów – podczas „avoided crossing" charakter dwóch modów jest wymieniany

M=1.8 M$_\odot$*, X=0.05* (typ δ Sct)

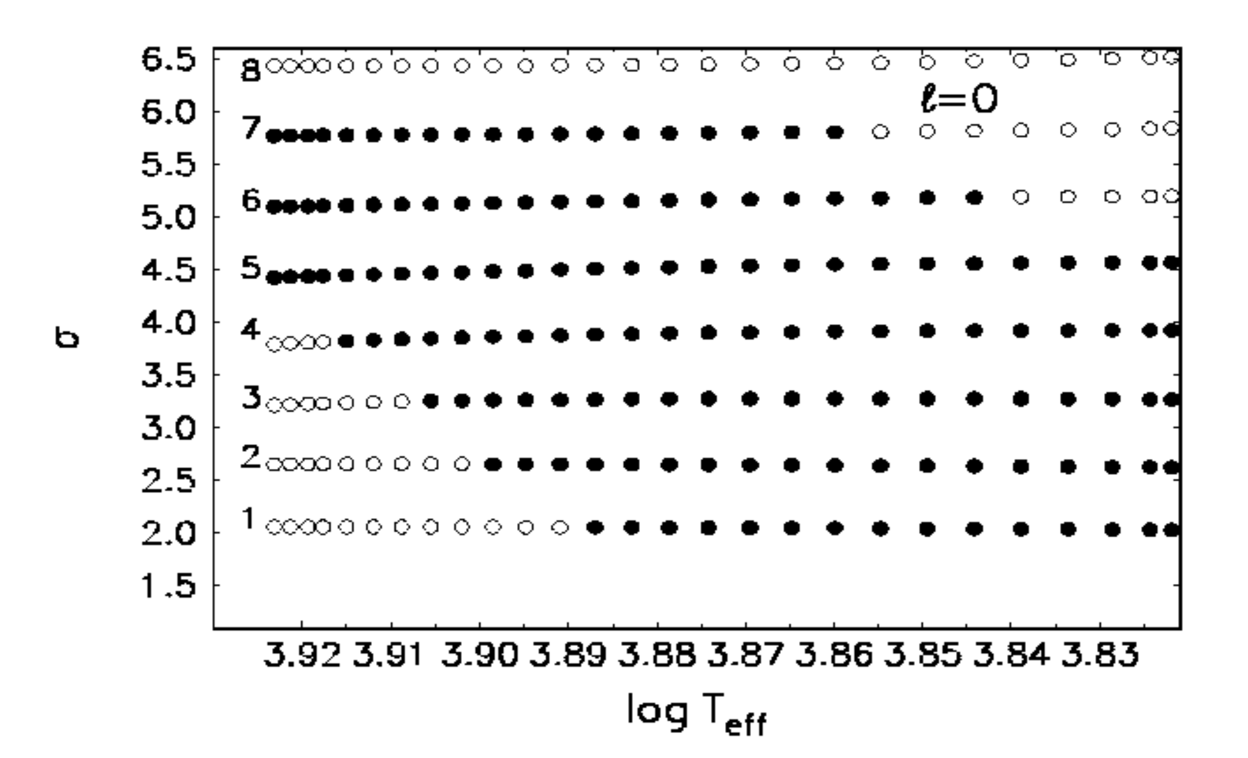


Linie poziome – obszar modów niestabilnych

W. Dziembowski

Ewolucja σ na MS dla gwiazdy o masie *M=1.8 M*$_\odot$

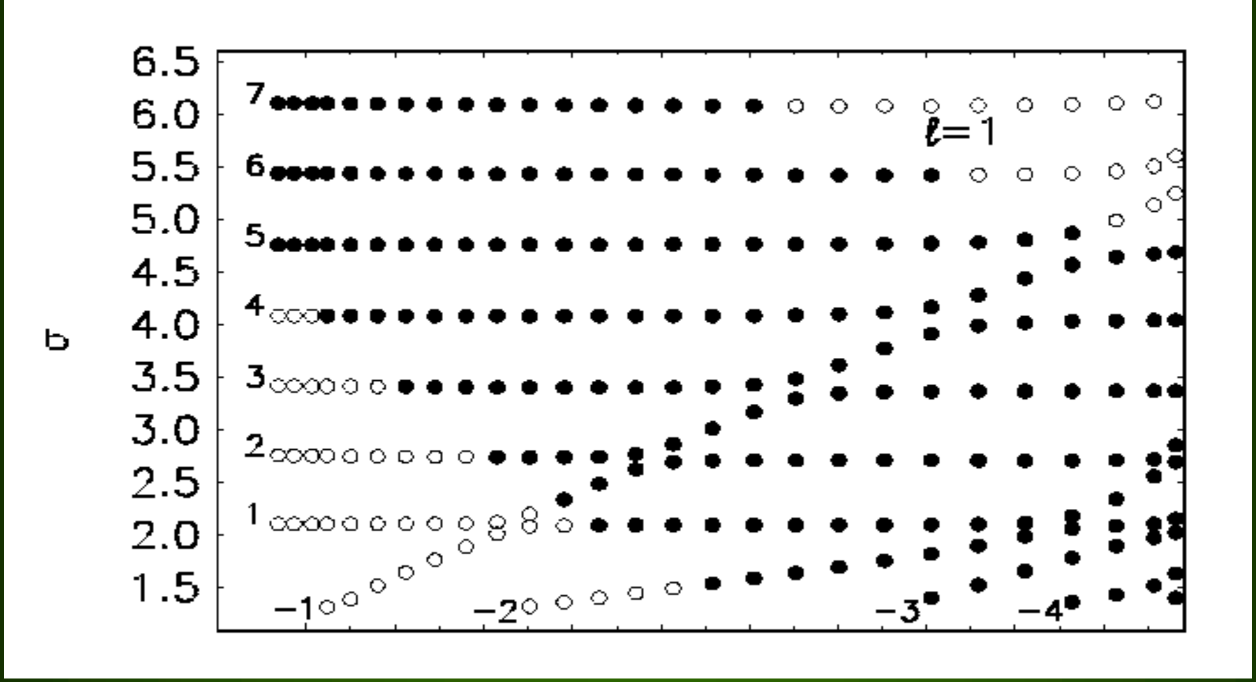
ℓ=0



W. Dziembowski

Ewolucja σ na MS dla gwiazdy o masie $M=1.8\,M_\odot$

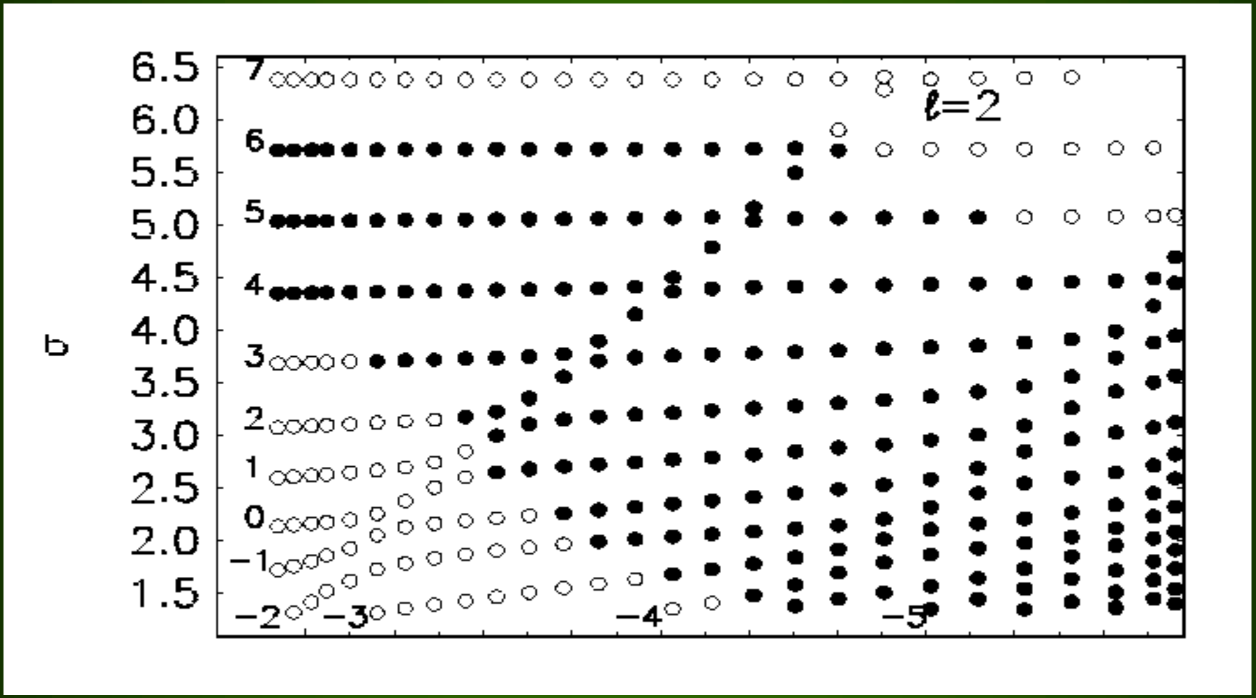
$\ell=1$



W. Dziembowski

Ewolucja σ na MS dla gwiazdy o masie M=1.8 $M_\odot$

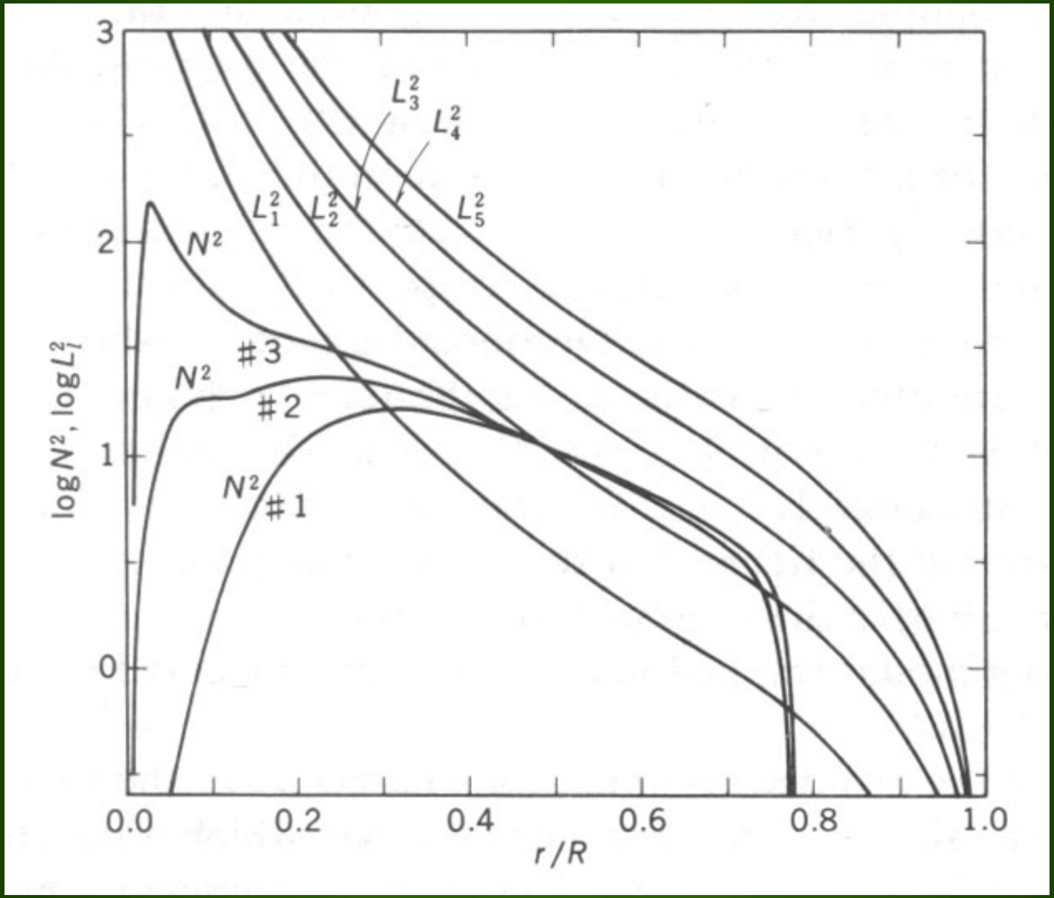
ℓ=2



W. Dziembowski

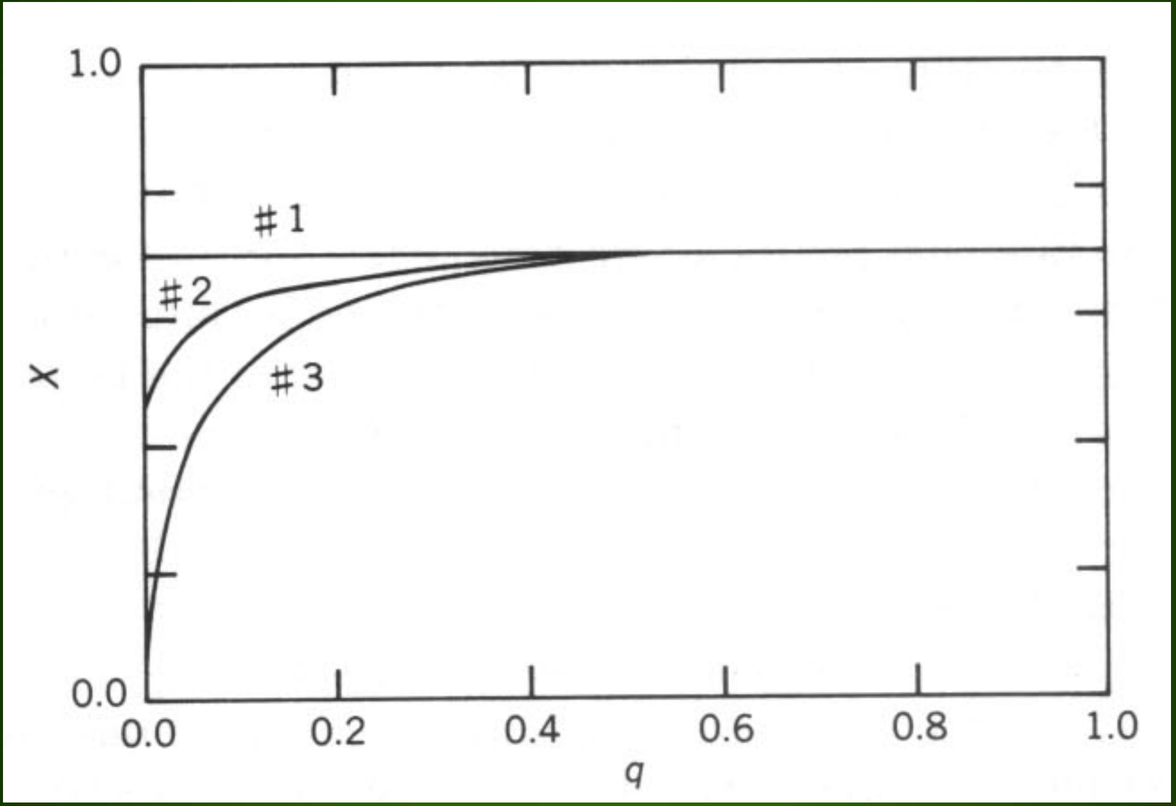
◎ MAŁOMASYWNA GWIAZDA CIĄGU GŁÓWNEGO

Model M=1 $M_\odot$ na ZAMS (#1) i dwóch bardziej zaawansowanych etapach ewolucji (#2 i #3)



Unno et al. 1989

Rozkład obfitości wodoru we wnętrzu gwiazdy o masie M=1 $M_{\odot}$ na różnych etapach ewolucji



Unno et al. 1989

wodór pali się w reakcjach p-p

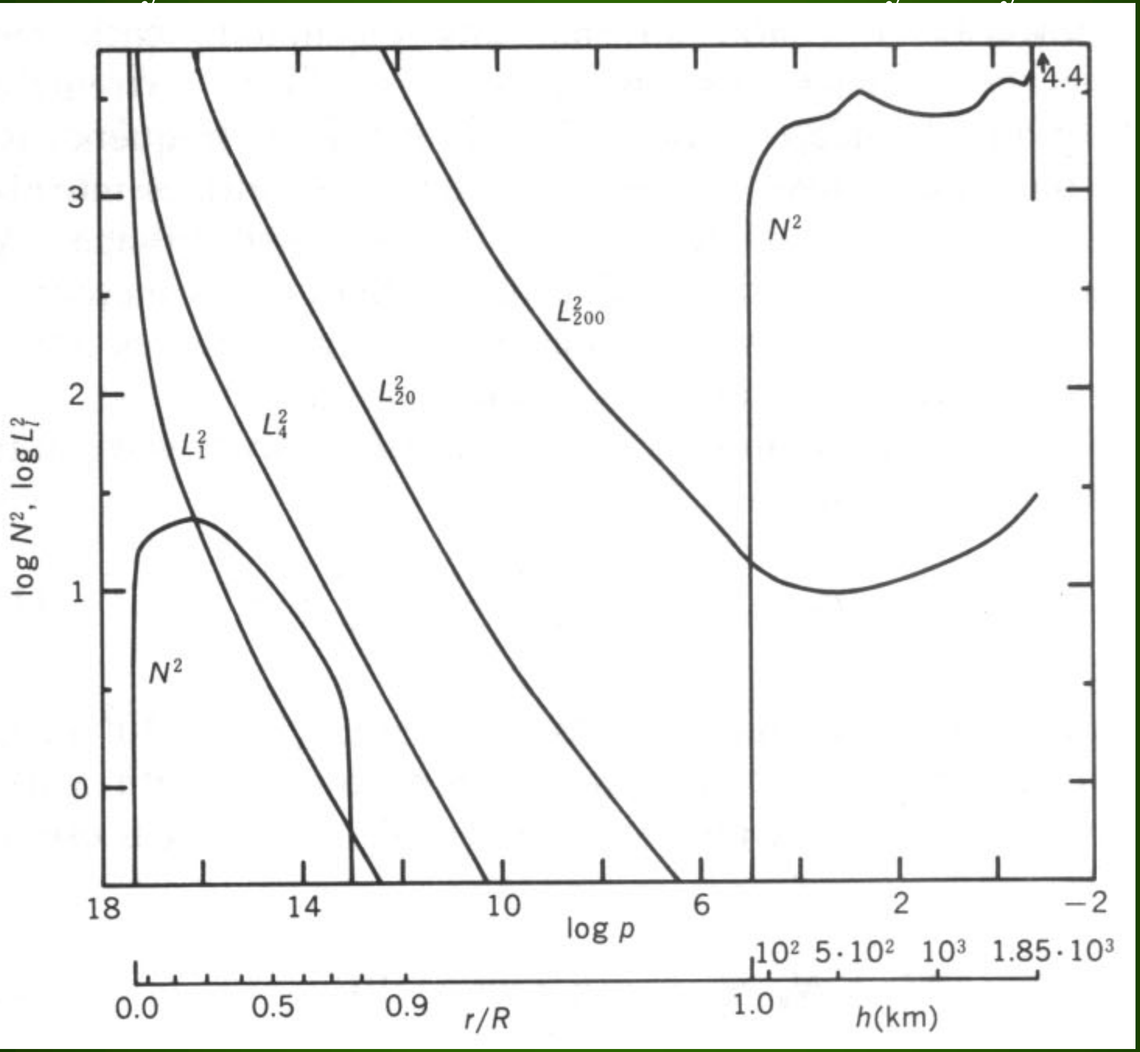
$\Downarrow$

jądro promieniste

$\Downarrow$

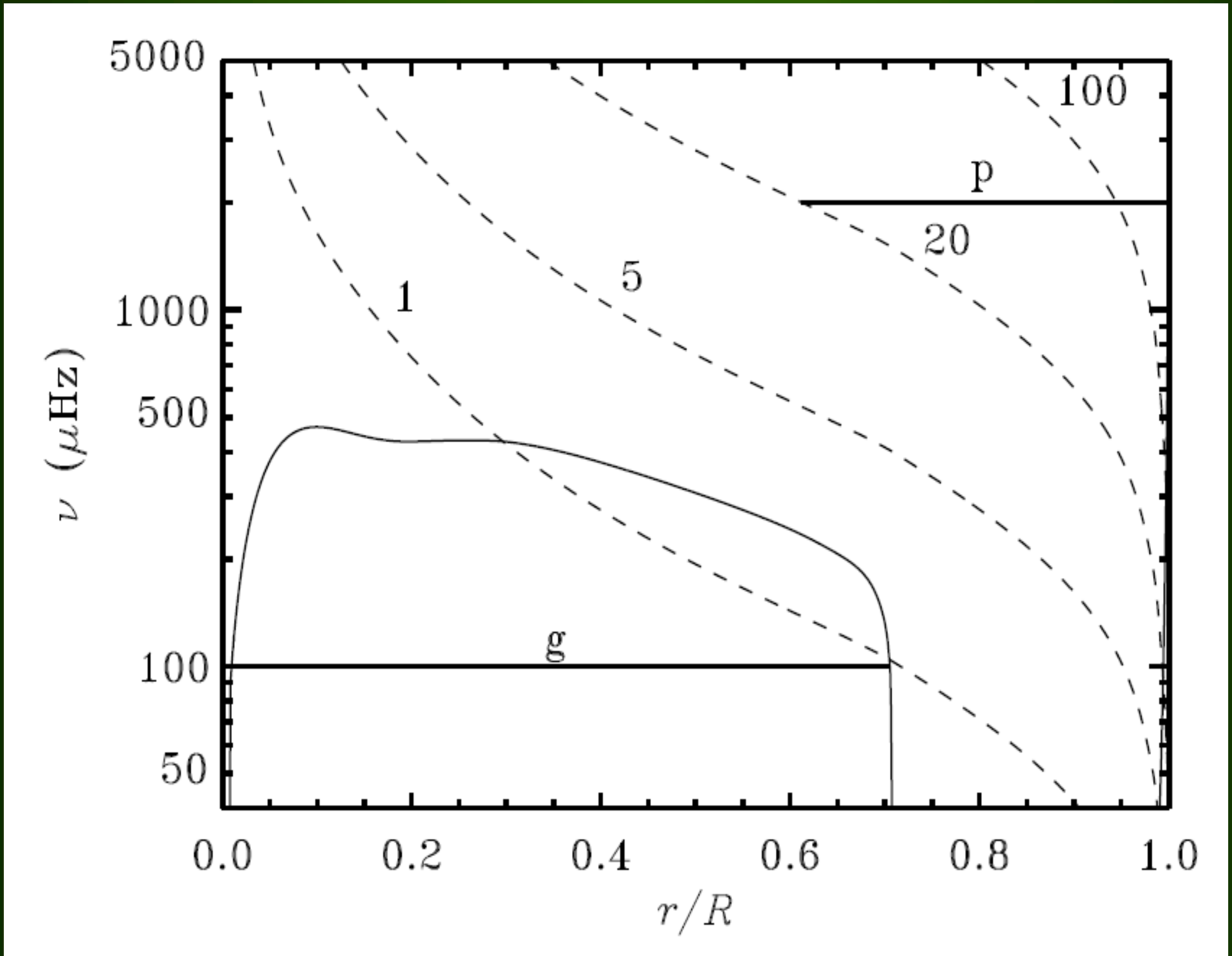
łagodny gradient μ

Diagram propagacji dla modelu Słońca z uwydatnieniem warstw atmosferycznych



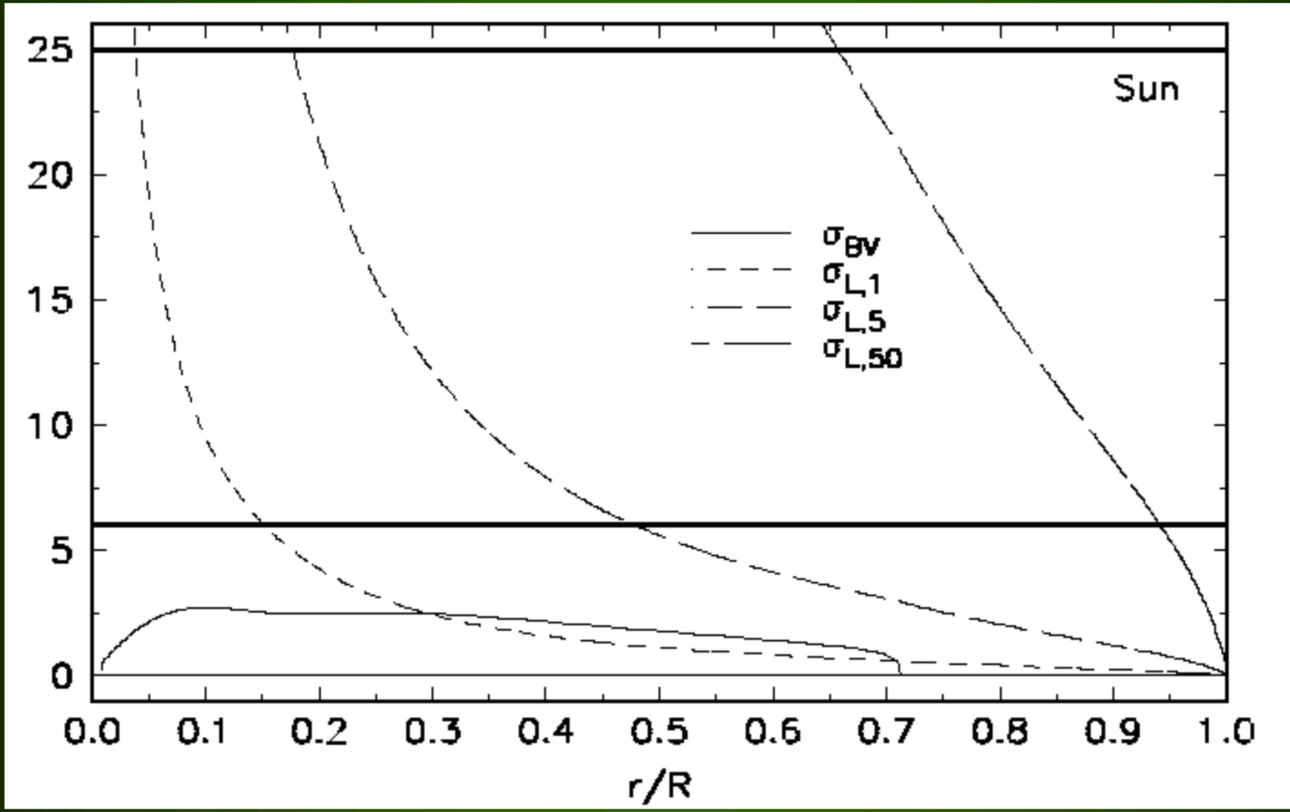
Unno et al. 1989

Diagram propagacji dla obecnego modelu Słońca.
Obszary pułapkowania: mod p - ℓ=20, ν=2000 μHz, mod g - ν=100μHz



J. Christensen-Dalsgaard

Diagram propagacji dla obecnego modelu Słońca

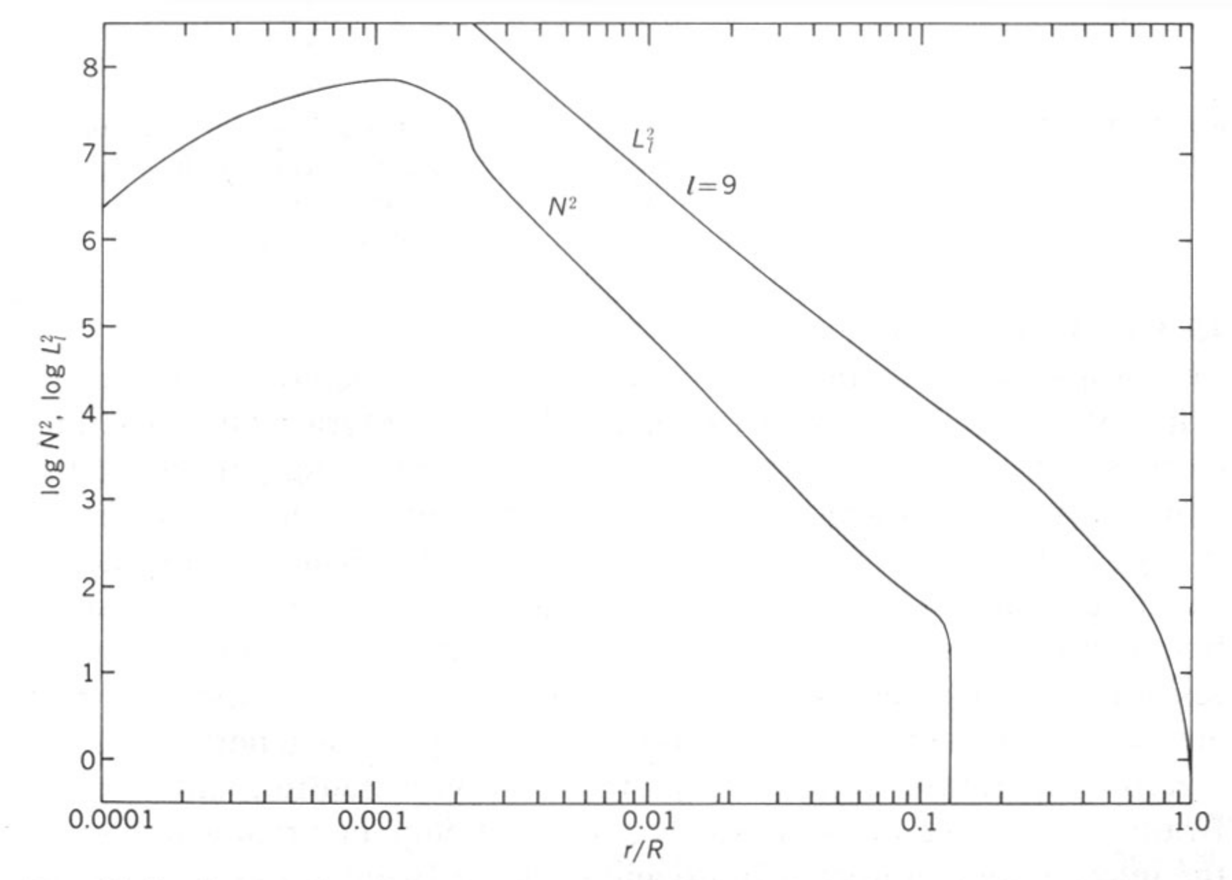


Linie poziome – zakres modów z dokładnie wyznaczonymi częstotliwościami

W. Dziembowski

◎ OLBRZYM

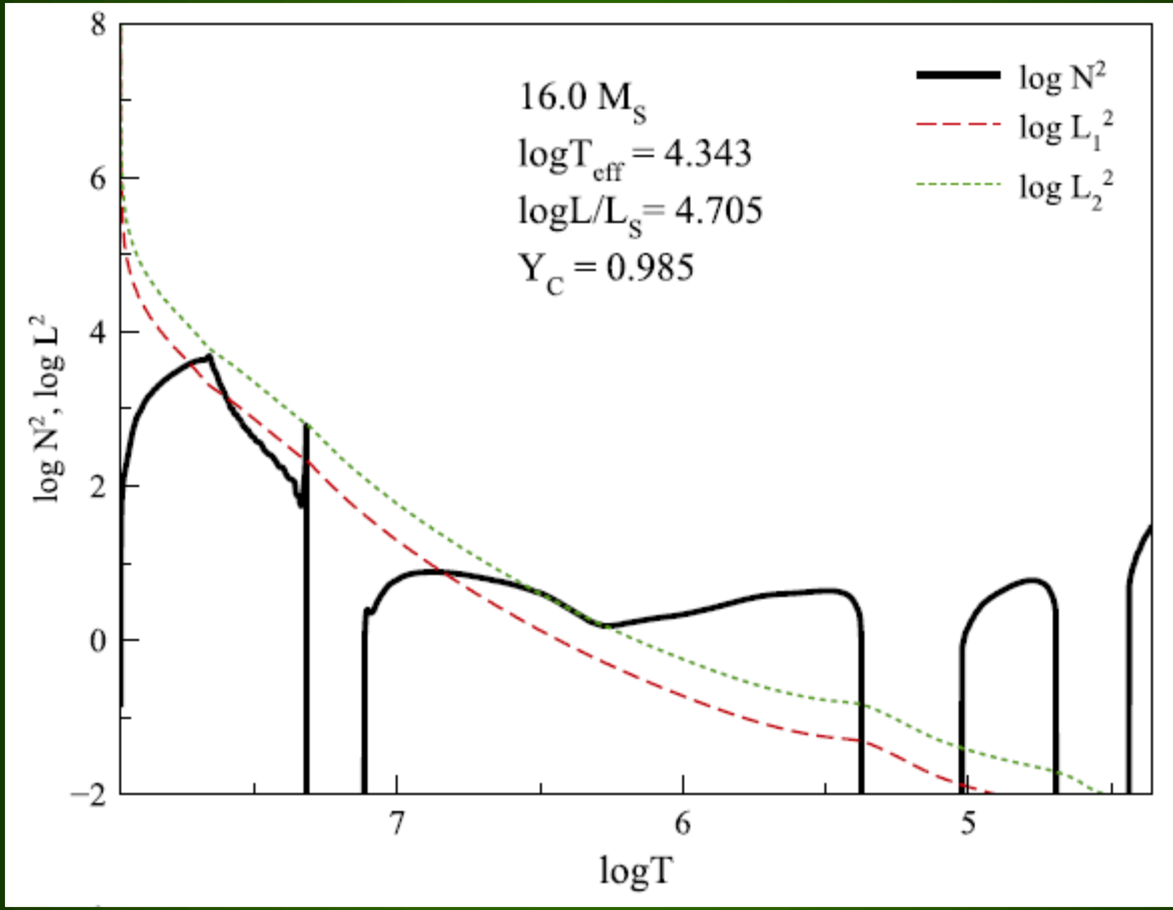
Model olbrzyma o masie M=5 $M_\odot$



Unno et al. 1989

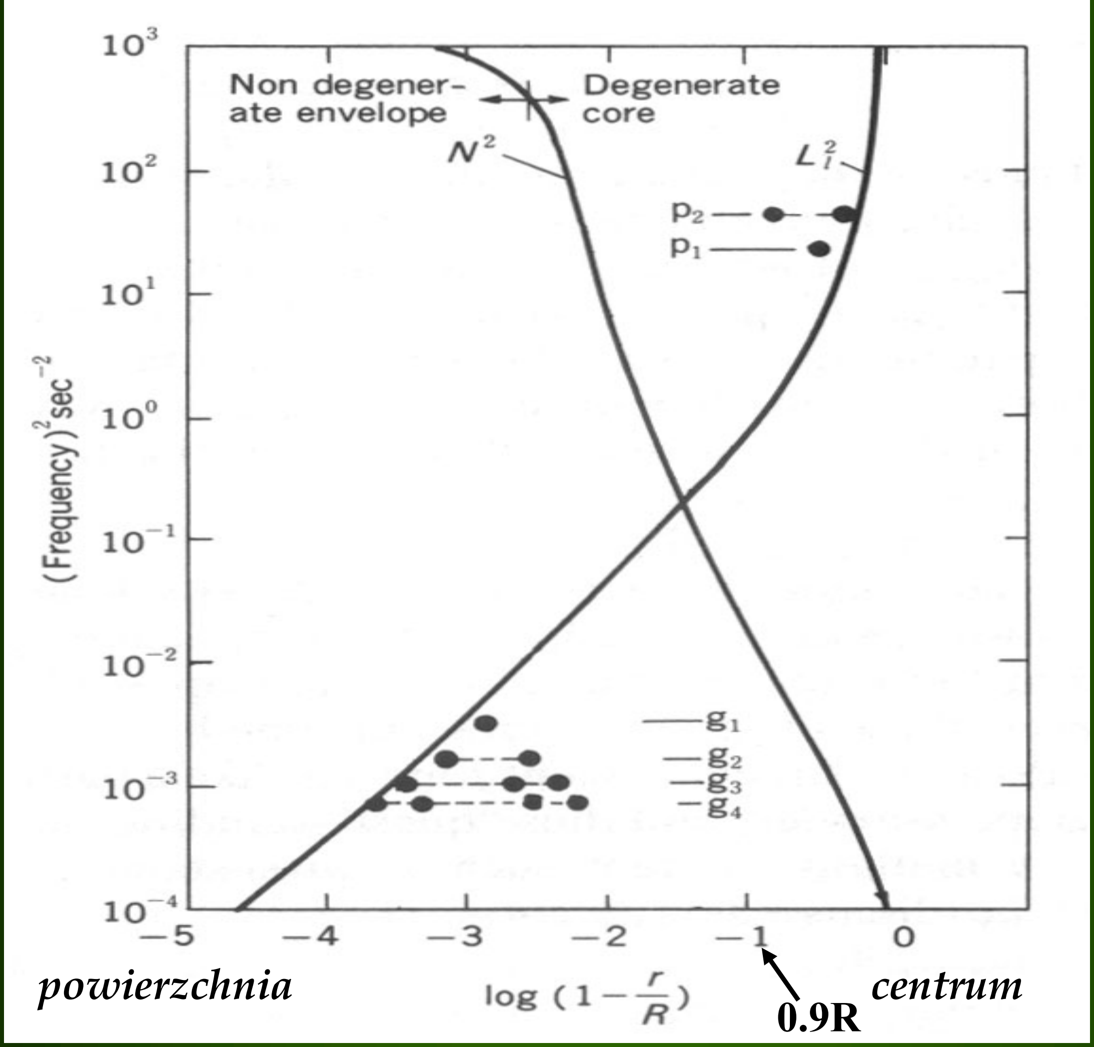
◎ NADOLBRZYM

Model nadolbrzyma o masie M=16 $M_\odot$



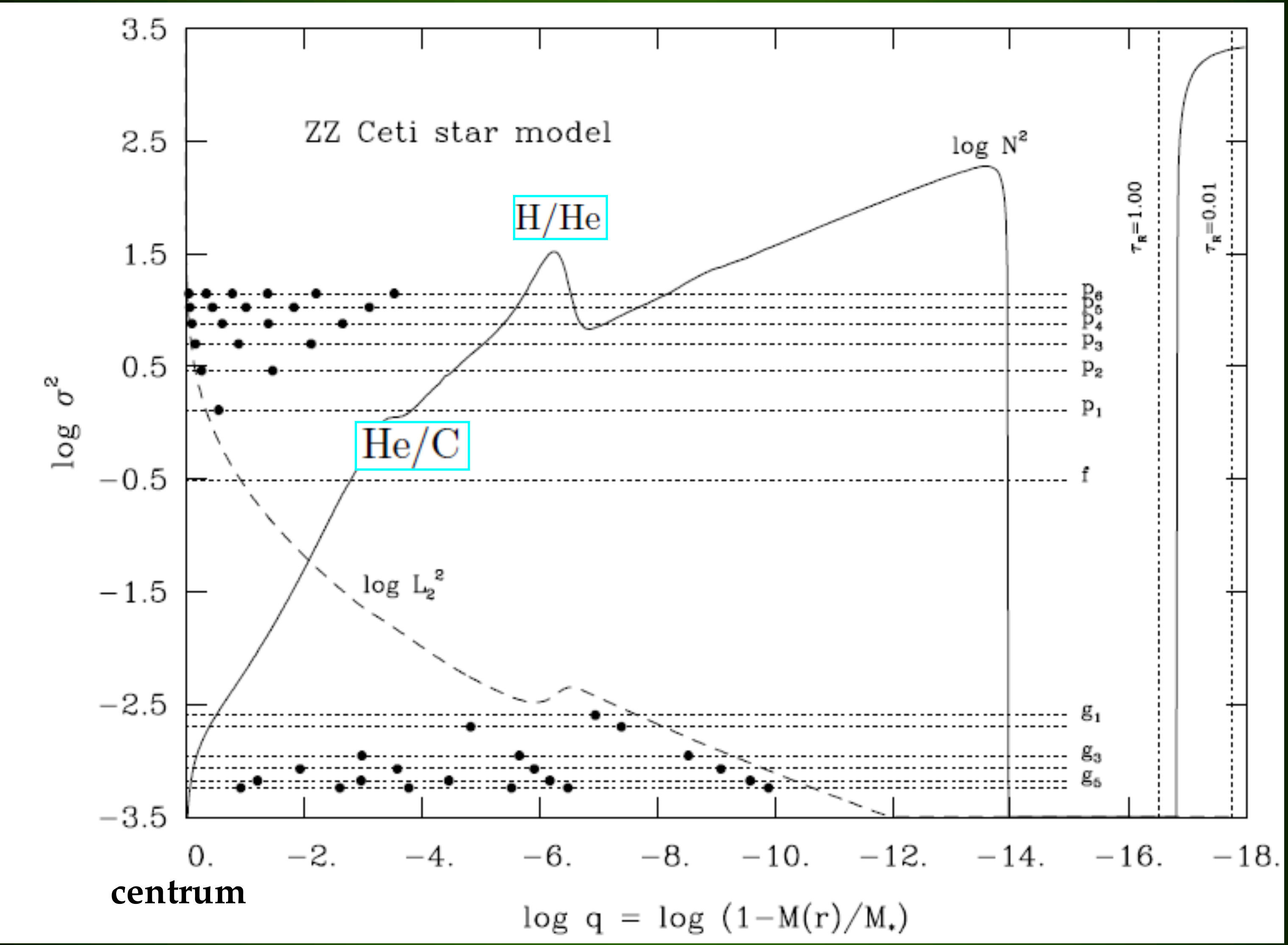
◎ BIAŁY KARZEŁ

Model białego karła o masie $M=1\,M_\odot$, $\log L/L_\odot = -4.2$, $\log T_{eff}=3.83$



Unno et al. 1989

◎ BIAŁY KARZEŁ

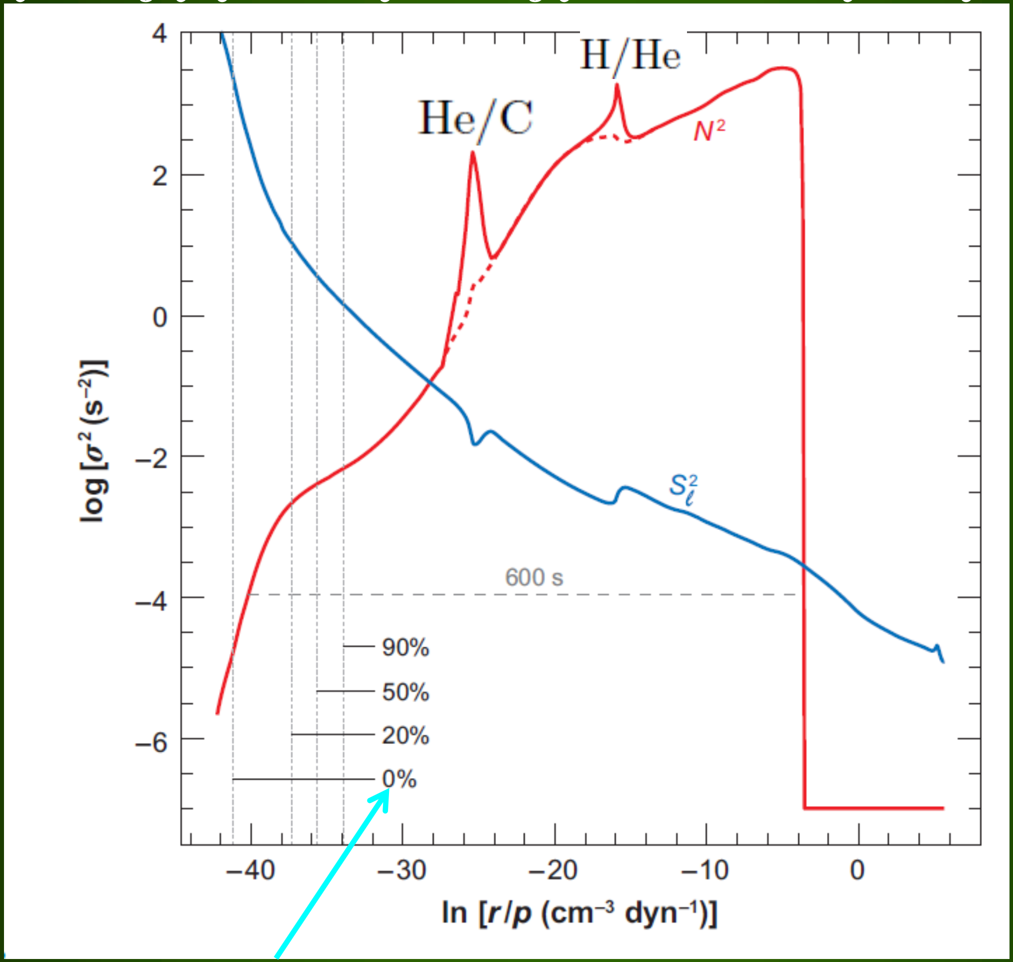


kropki - położenie węzłów radialnej funkcji własnej

Fontaine i in. 2013

◎ BIAŁY KARZEŁ

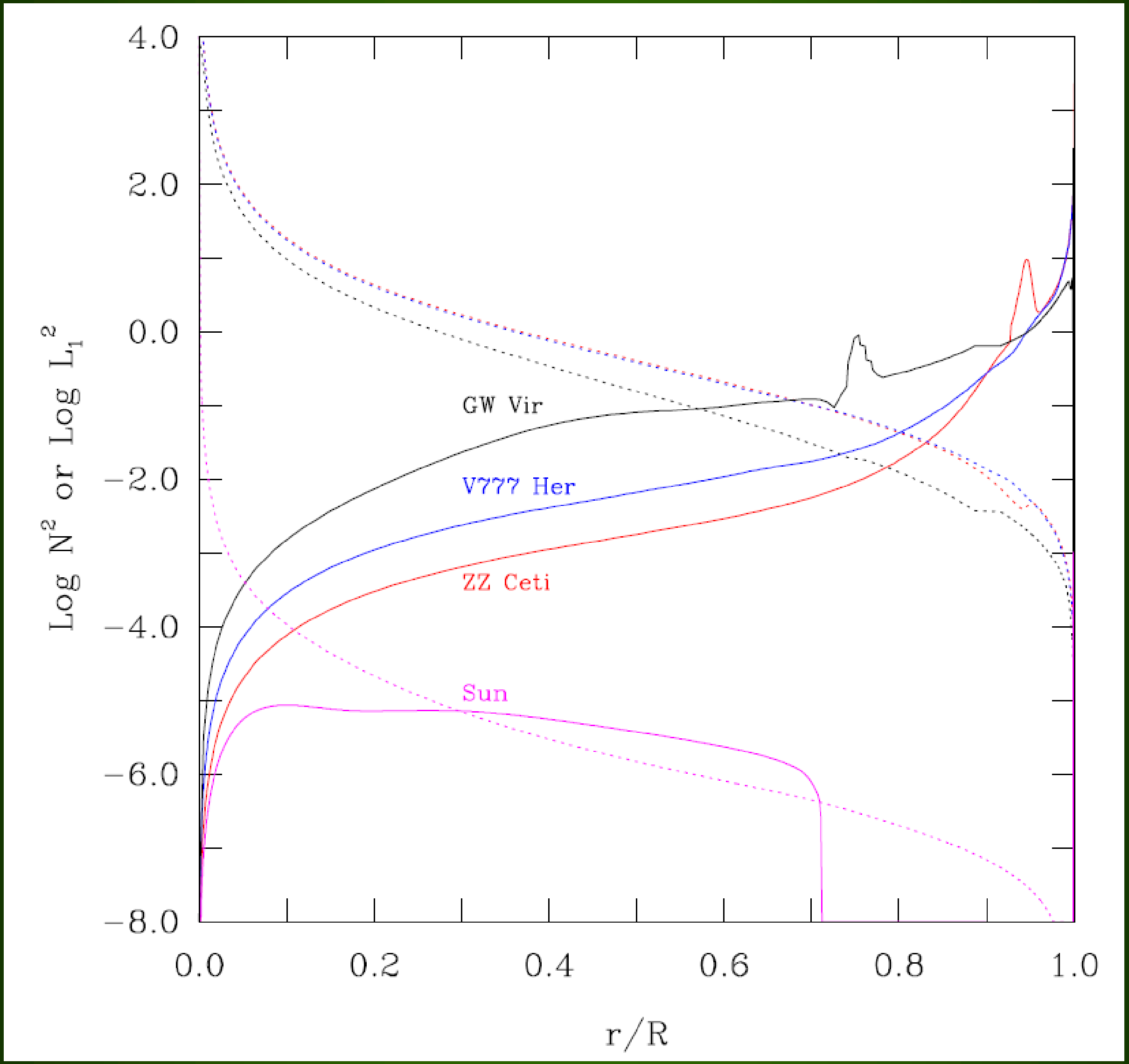
model białego karła DAV M=1.1 $M_\odot$
uwzględniający stratyfikację chemiczną i krystalizację



Ilość skrystalizowanej masy

Winget & Kepler 2008

Porównanie diagramu propagacji dla białych karłów różnych typów i Słońca



G. Fontaine, P. Brassard 2008

OPIS ASYMPTOTYCZNY

Bardziej kompletny opis uzyskujemy badając asymptotyczne właściwości równań pulsacyjnych

$$\Psi = c^2 \rho^{\frac{1}{2}} \mathrm{div}\vec{\xi}$$

równania oscylacyjne przybliżamy przez

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = -K(r)\Psi$$

gdzie

$$K(r) = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_\ell^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\right]$$

$$\omega_c^2 = \frac{c^2}{4H^2}\left(1 - 2\frac{dH}{dr}\right), \quad H = -\left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)^{-1}$$

ω_c - częstotliwość obcięcia, dla $\omega < \omega_c$ fala zanika

Zachowanie ξ_r zależy lokalnie od znaku K(r).

Rozwiązania maja postać:

$\xi_r \sim \cos\left(\int K^{1/2} dr + \varepsilon\right)$ dla $K > 0$

$\xi_r \sim \exp\left(\pm\int |K|^{1/2} dr\right)$ dla $K < 0$

czyli

$K > 0 \Rightarrow \xi_r$ jest oscylującą funkcja r

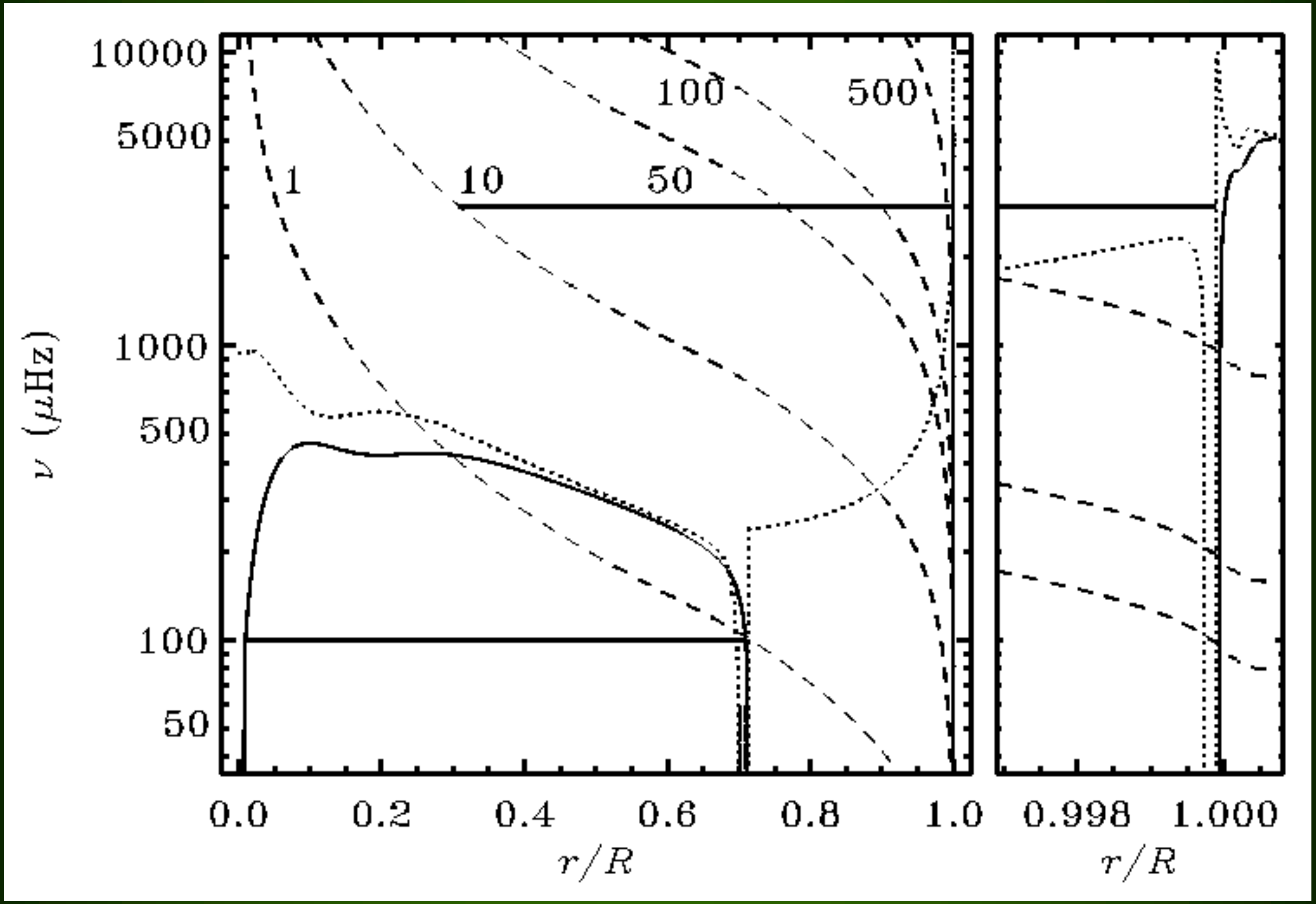
$K < 0 \Rightarrow$ rozwiązanie jest eksponencjalnie rosnącą lub malejącą funkcją r

$K = 0 \Rightarrow$ punkty odbicia (zwrotne)

Zachowanie modu oscylacji jest kontrolowane przez trzy częstotliwości charakterystyczne:

$\mathbf{S}_\ell$, $\mathbf{N}$, $\boldsymbol{\omega}_c$

Częstotliwości charakterystyczne dla modelu Słońca:
N/2π (linia ciagła), S_ℓ (linia przerywana), ω_c /2π (linia kropkowana), dla ℓ=1, 10, 50, 100 i 500. Linie poziome – obszary pułapkowania dla modu p (3000μHz) o ℓ=10 i modu g (100μHz).



J. Christensen-Dalsgaard, W. Dziembowski

mody p ($\omega \gg N, \omega_c$) - **w wyrażeniu na K(r) ($\equiv k_r^2$) możemy zaniedbać N i ω_c**

$$k_r^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{S_\ell^2}{\omega^2}\right)$$

<u>wewnętrzny punkt odbicia</u>, $r=r_t$, $\omega \approx S_\ell(r_t)$, tj. $k_r=0$, czyli

$$\frac{c(r_t)}{r_t} = \frac{\omega}{L}, \qquad L = \sqrt{\ell(\ell+1)}$$

Blisko powierzchni, $S_\ell \ll \omega$, a <u>zewnętrzny punkt odbicia</u>, $r=R_t$, jest wyznaczony przez $\omega \approx \omega_c$

mody g ($\omega <$ **N**) - w ogólności $\omega^2 \ll S_\ell^2$

$$k_r^2 \simeq \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)$$

Zachowanie modów g jest całkowicie kontrolowane przez częstotliwość wyporu.

Punkty odbicia znajdują się w miejscach gdzie $\omega \approx N$.

ASYMPTOTYCZNE RELACJE DYSPERSYJNE

Z równania

$$\boxed{\frac{d^2\Psi}{dr^2} = -K(r)\Psi}$$

możemy otrzymać przybliżone wyrażenie na częstotliwości własne

ASYMPTOTYCZNE RELACJE DYSPERSYJNE

Z analizy JWKB pokazuje się, że mody oscylacji, zarówno p jak i g, spełniają relację

$$\int_{r_1}^{r_2} K(r)^{1/2} \mathrm{d}r = (n - \frac{1}{2})\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\omega \int_{r_1}^{r_2} \left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{c} \simeq \pi(n - 1/2)$$

gdzie r_1 i r_2 są kolejnymi zerami K(r) i K(r)>0 między nimi.

Analiza JWKB bada zachowanie fal blisko punktów odbicia.

Zał. rozwiązanie zmienia się szybko w porównaniu z K(r)

Równanie na poprzednim slajdzie wyznacza bezpośrednio częstotliwość modów złapanych pomiędzy punktami r_1 i r_2

mody p

Dla wysokich częstotliwości możemy założyć $|N^2/\omega^2| \ll 1$.
Ponadto $\omega_c/\omega \ll 1$ poza górnym punktem odbicia.

$$\omega \int_{r_t}^{R} \left[1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{c} \simeq \pi[n + \alpha(\omega)]$$

Prawo Duvall'a (1982)

$$\frac{\pi[n+\alpha(\omega)]}{\omega} \simeq \int_{r_t}^{R} \left(1 - \frac{L^2c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{c}$$

Jeden z najważniejszych wyników teorii asymptotycznej, wykryte na podstawie analizy częstotliwości słonecznych.

Dla modów o niskich stopniach harmonika sferycznego, ℓ,

$$\int_{r_t}^{R}\left(1-\frac{L^2c^2}{\omega^2r^2}\right)^{1/2}\frac{dr}{c}\simeq\int_0^R\frac{dr}{c}-\frac{\pi}{2}\frac{L}{\omega}$$

stąd

$$\boxed{\omega=\frac{(n+L/2+\alpha)\pi}{\displaystyle\int_0^R\frac{\mathrm{d}r}{c}}}$$

Dla modów o niskich ℓ, L zastępujemy przez ℓ +1/2

$$\nu_{nl} \equiv \frac{\omega_{nl}}{2\pi} \simeq \left(n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha\right) \Delta\nu$$

gdzie

$$\Delta\nu = \left[2 \int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{c}\right]^{-1}$$

duże odstępy

częstotliwości modów p są równoodstępne

$$\Delta\nu \approx \nu_{n+1,\ell} - \nu_{n,\ell}$$ - **duże odstępy**

Ponadto mody o takich samych wartościach n+ℓ/2 spełniają

$$\nu_{n,\ell} \approx \nu_{n-1,\ell+2}$$

$$\delta\nu_{n,\ell} \approx \nu_{n,\ell} - \nu_{n-1,\ell+2}$$ - **małe odstępy**

Te dwie cechy obserwujemy w widmie oscylacji Słońca. Odchylenia od tych równości mają bardzo duże znaczenie diagnostyczne.

z analizy JWKB równań oscylacyjnych pokazuje się, że

$$\boxed{\nu_{nl} - \nu_{n-1,l+2} \simeq -(4l+6)\frac{\Delta\nu}{4\pi^2\nu_{nl}}\int_0^R \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{r}}$$

Wielkość ta daje informację o strukturze jądra.

$\delta\nu_{n,\ell}$ maleje, gdy gwiazda ewoluuje

$\Delta\nu$ - informacja o masie gwiazdy

$\delta\nu$ - miara wieku gwiazdy

Fragment widma oscylacji Słońca otrzymany z danych VIRGO (SOHO)

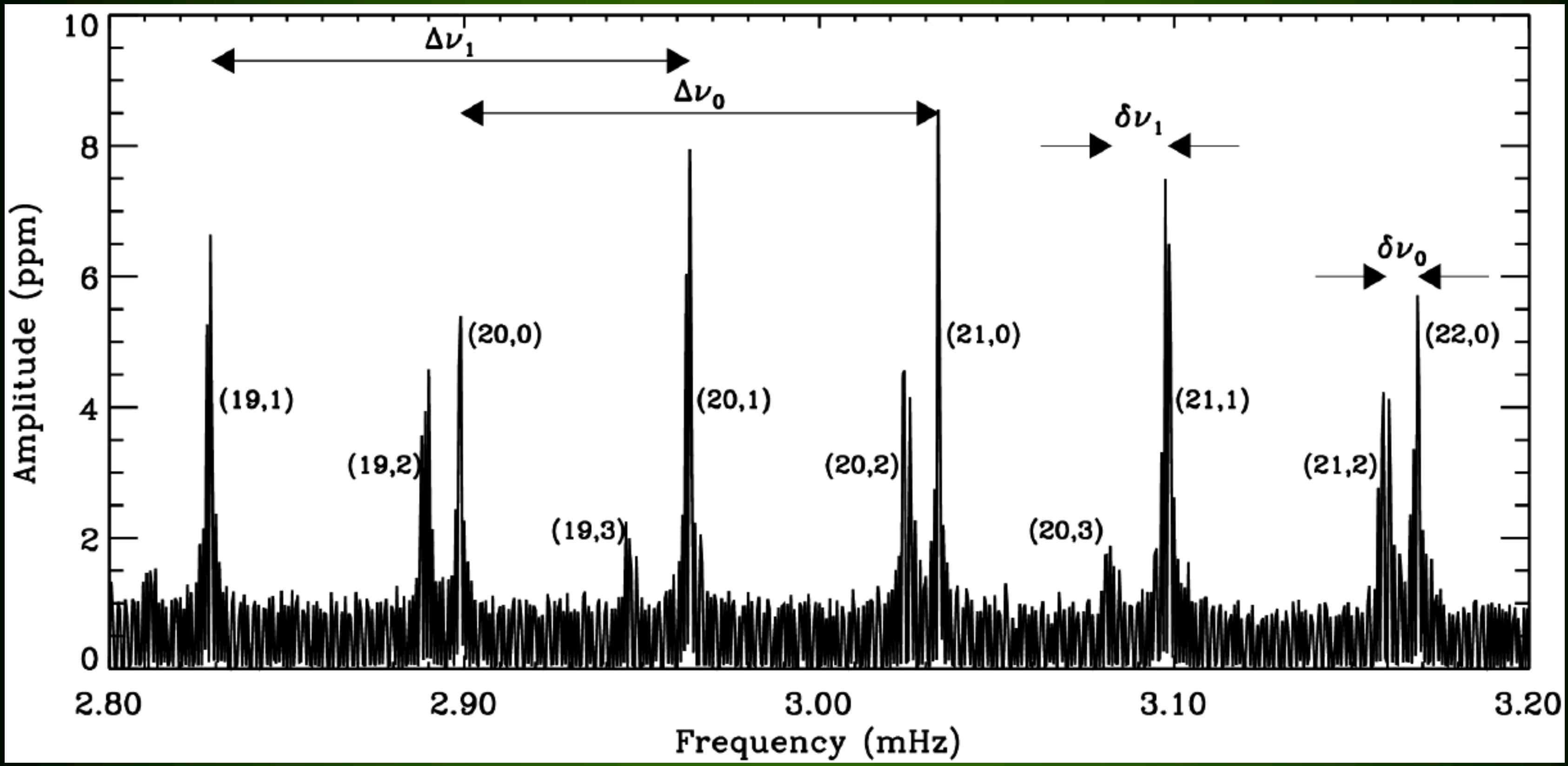
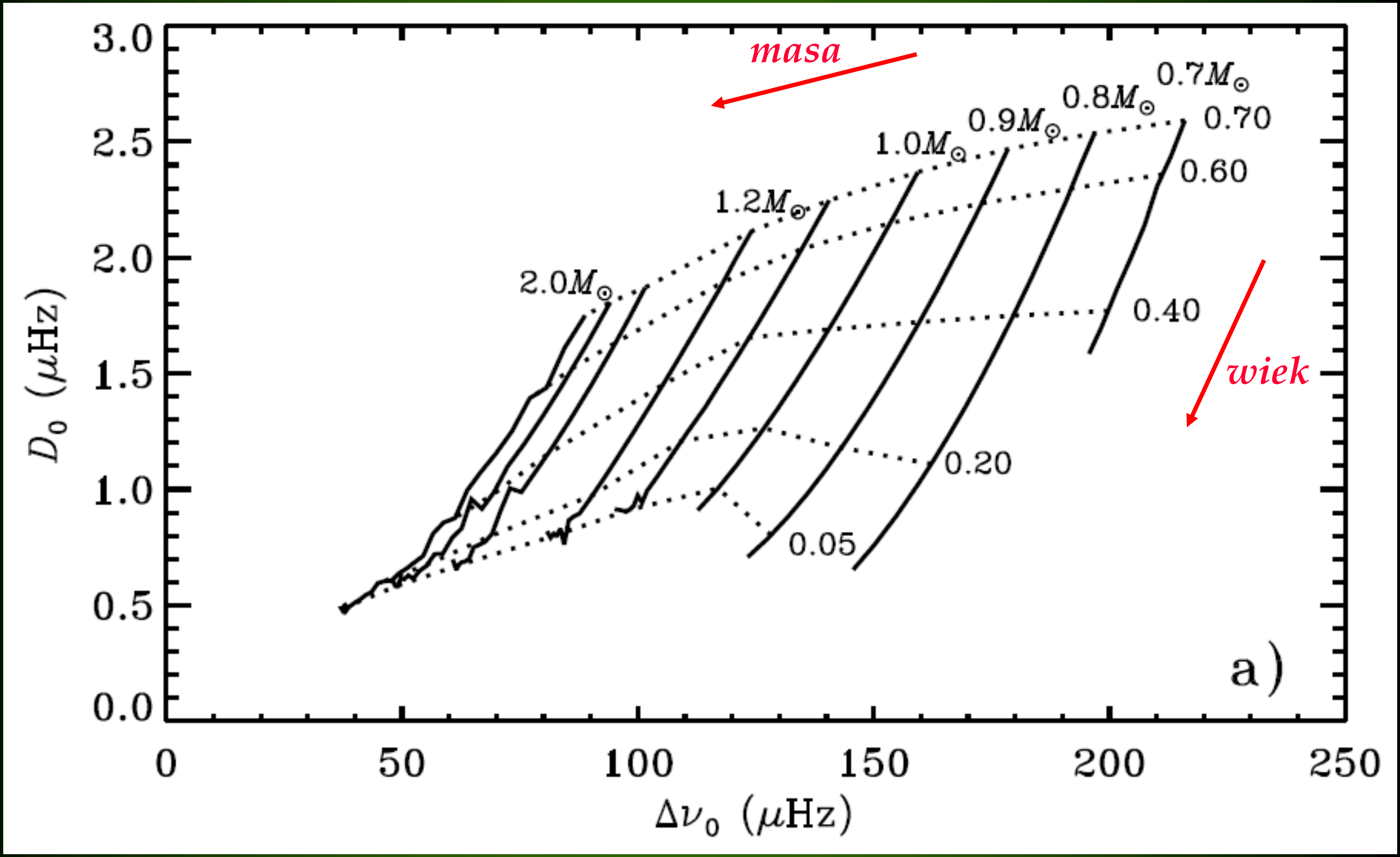


Diagram asterosejsmiczny



$\langle \delta\nu_{n\ell} \rangle_n \cong (4\ell+6)D_0$

J. Christensen-Dalsgaard

mody g

Asymptotyczne zależności znajdujemy przyjmując $\omega^2 << S_\ell^2$

Zakładamy, że N ma pojedyncze maksimum, czyli dla danej częstotliwości dwa punkty odbicia są jednoznacznie określone.

$$L \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = (n - 1/2)\pi$$

$$\Downarrow$$

$\omega < N_{max}$

dla danego n, $\omega \rightarrow N_{max}$ gdy $\ell \rightarrow \infty$

Dla modów g o wysokich n i niskich ℓ, $\omega^2 << N^2$, prawie w całym przedziale $[r_1,r_2]$. Można pokazać, że

$$\omega \simeq \frac{L\int_{r_1}^{r_2} N\frac{\mathrm{d}r}{r}}{\pi(n+l/2+\alpha_g)}$$

M. Tassoul 1980

Wprowadzając $\Pi=2\pi/\omega$, napiszemy

$$\Pi \simeq \frac{\Pi_0}{L}\left(n+\frac{l}{2}+\alpha_g\right)$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{2\pi^2}{\int_{r_1}^{r_2} N\frac{\mathrm{d}r}{r}}\ .$$

okresy takich modów o danym ℓ są **równoodstępne**

$$\Pi_n - \Pi_{n-1} = \Pi_0 / L$$

równoodstępnośc w okresach obserwuje się dla:

- **białych karłów**
- **gorących podkarłów**
- **gwiazd typu B**

mody f

$$\rho = \text{const},\ \rho' = 0$$

$$\text{div}\,\xi = 0 \ \Rightarrow \delta\rho = 0 \Rightarrow \delta p = 0$$

$$\xi_r \propto \exp(k_h r)$$

$\omega^2 \approx g_s k_h$ - **powierzchniowe fale grawitacyjne**

$$k_h = [\ell(\ell+1)]^{1/2}/R \ \ \Rightarrow\ \ \omega^2 \approx L(GM/R^3)$$

czyli częstotliwości takich fal skalują się jak ω_{dyn}
dlatego zależą tylko od średniej gęstości gwiazdy