

# PULSACJE GWIAZDOWE

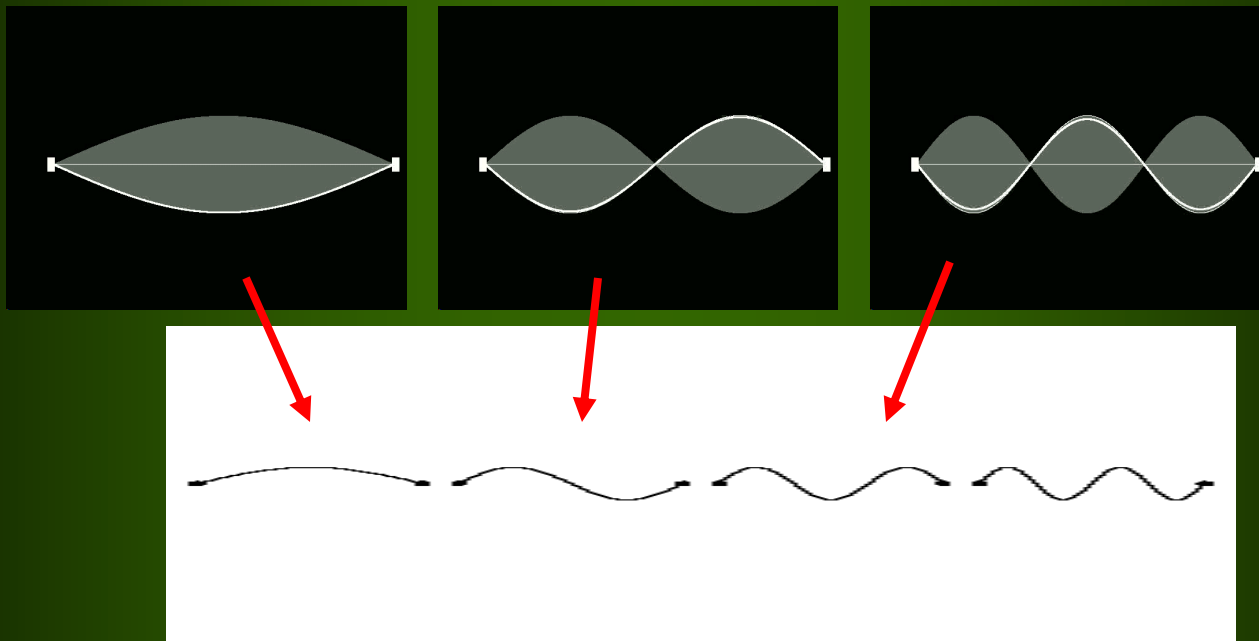
semestr zimowy 2018/2019

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

# PUŁAPKOWANIE OSCYLACJI

Fale akustyczne i grawitacyjne propagują się w kierunku radialnym tylko w określonych obszarach.

Pulsacje nieradialne są **falami stojącymi**, które tworzą się przez odbicie od granic obszaru propagacji.



# ANALIZA LOKALNA

Zakładamy  $\Phi' = 0$  i wprowadzamy nowe zmienne

$$\tilde{\xi} \equiv r^2 \xi_r \exp\left(-\int_0^r \frac{g}{c^2}\right)$$
$$\tilde{\eta} \equiv \frac{p'}{\rho} \exp\left(-\int_0^r \frac{N^2}{g}\right) = \omega^2 r \xi_h \exp\left(-\int_0^r \frac{N^2}{g}\right)$$

Mamy równania pulsacyjne w kanonicznej postaci

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dr} = h(r) \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1\right) \tilde{\eta}$$
$$\frac{d\tilde{\eta}}{dr} = \frac{1}{r^2 h(r)} (\omega^2 - N^2) \tilde{\xi}$$
$$h(r) \equiv \exp\left[\int_0^r \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c^2}\right) dr\right] > 0$$

Zakładamy, że współczynniki tych równań są **stałe** na krótkiej skali odległości  $r$  !

Wówczas dostaniemy

$$\tilde{\xi}(r), \tilde{\eta}(r) \propto \exp(ik_r r)$$

$$k_r^2 = \frac{(\omega^2 - S_\ell^2)(\omega^2 - N^2)}{\omega^2 c^2}$$



**relacja dyspersyjna** - związek między liczbą falową i częstotliwością

stojące fale akustyczne

stojące fale grawitacyjne

Dla  $\omega^2 > S_\ell^2, N^2$  lub  $\omega^2 < S_\ell^2, N^2 \rightarrow k_r$  jest rzeczywiste i  $k_r^2 > 0$   
i fala może się propagować w kierunku radialnym.

Dla  $S_\ell^2 > \omega^2 > N^2$  lub  $S_\ell^2 < \omega^2 < N^2 \rightarrow k_r$  jest urojone i  $k_r^2 < 0$   
i fala jest tłumiona (znoszona).

Uwzględniając wyrażenie na horyzontalna liczbę falową

$$k_h^2 = \ell(\ell+1)/r^2 = S_\ell^2/c^2$$

Równanie dyspersyjne przepisujemy w postaci

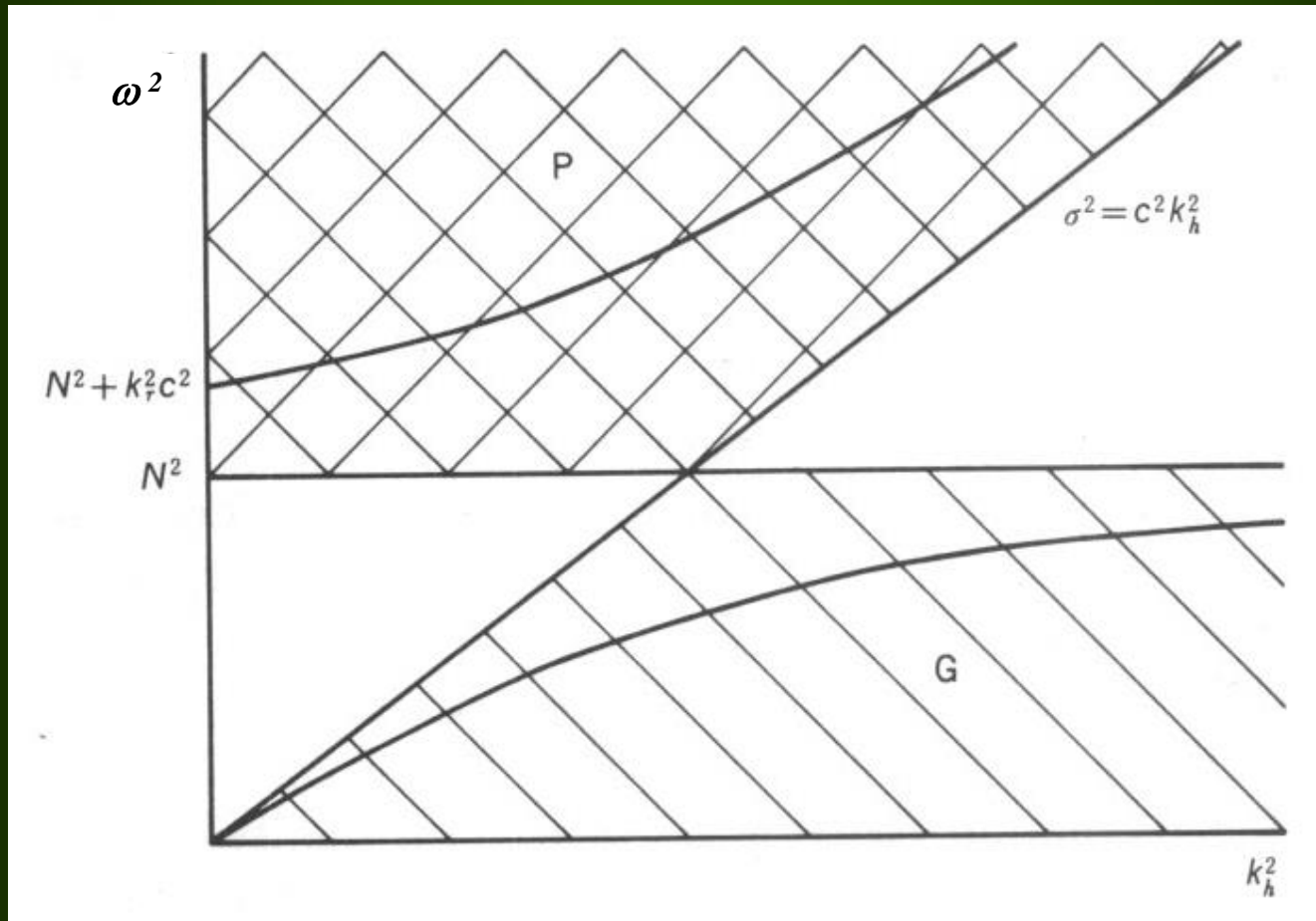
$$\omega^4 - (N^2 + k^2 c^2)\omega^2 + N^2 k_h^2 c^2 = 0$$

gdzie

$$k^2 = k_r^2 + k_h^2$$

**DIAGRAM DIAGNOSTYCZNY**

powyższa zależność na płaszczyźnie  $(k_h^2, \omega^2)$



- ◆ Dla  $k_r^2 \neq 0$  mamy dwie hiperbole.
- ◆ Dla  $k_r^2 = 0$  mamy  $\omega^2 = N^2$  i  $\omega^2 = k_h^2 c^2$  (linie asymptotyczne).

## Relacje dyspersyjne dla prostych przykładów ruchu falowego

$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2$  - mody p (płaska fala dźwiękowa)

$\omega^2 = N^2 k_h^2 / k^2$  - mody g (wewnętrzne fale wypornościowe)

$\omega^2 = g_0 k_h$  - mody f (powierzchniowe fale wypornościowe,  $\text{div} \boldsymbol{\xi} \cong 0$ )

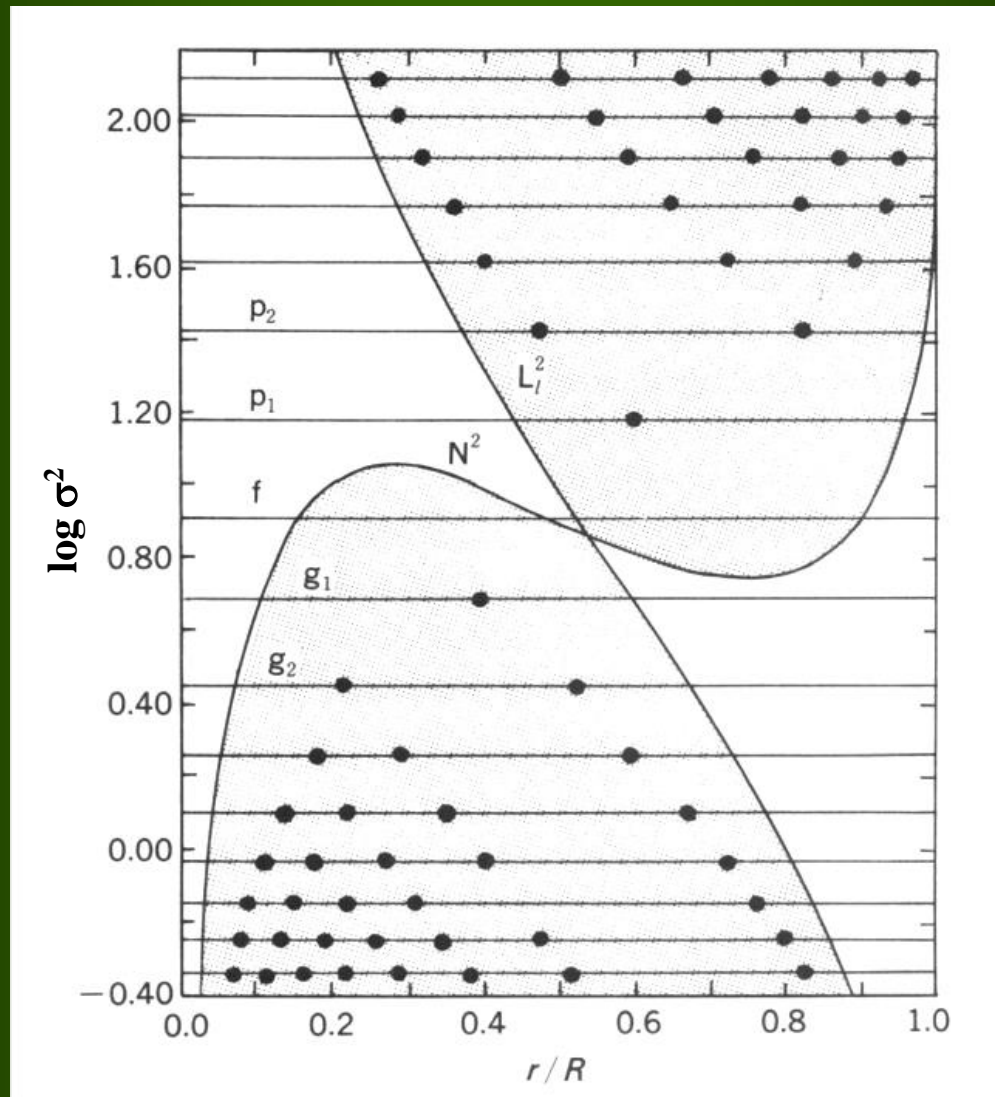


Nieradialne oscylacje mają charakter **dualny**, który zależy od częstotliwości i horyzontalnej liczby falowej.



# DIAGRAMY PROPAGACJI

# DIAGRAMY PROPAGACJI DLA POLITROPY $n=3$ i $\ell=2$



Zachowanie  $S_\ell^2$  mało się zmienia od gwiazdy do gwiazdy.

Dla większych  $\ell$ , krzywa  $S_\ell^2$  przesuwa się w górę:

$$S_{\ell+1}^2/S_\ell^2 = (\ell+2)/\ell$$

Zachowanie  $N^2$  jest bardzo czułe na zmiany ewolucyjne.

**Dla gazu doskonałego mamy**

$$N^2 \simeq \frac{g^2 \rho}{p} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + \nabla_{\mu}), \quad \nabla_{\mu} = \frac{d \ln \mu}{d \ln p}, \quad p = p_{\text{gas}}$$

**Jeśli mamy dodatkowo ciśnienie promieniowanie, to**

$$N^2 \simeq \frac{g^2 \rho}{p} \left[ \frac{4 - 3\beta}{\beta} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla) + \nabla_{\mu} \right], \quad \beta = \frac{p_{\text{gas}}}{p}, \quad p = p_{\text{gas}} + p_{\text{rad}}$$

$\nabla_{\mu}$  - gradient składu chemicznego

$\mu$  - średni ciężar cząsteczkowy

# NIESTABILNOŚĆ KONWEKTYWNA

$\nabla > \nabla_{ad}$  - kryterium Schwarzschilda

$N^2 < 0$  - kryterium Ledoux

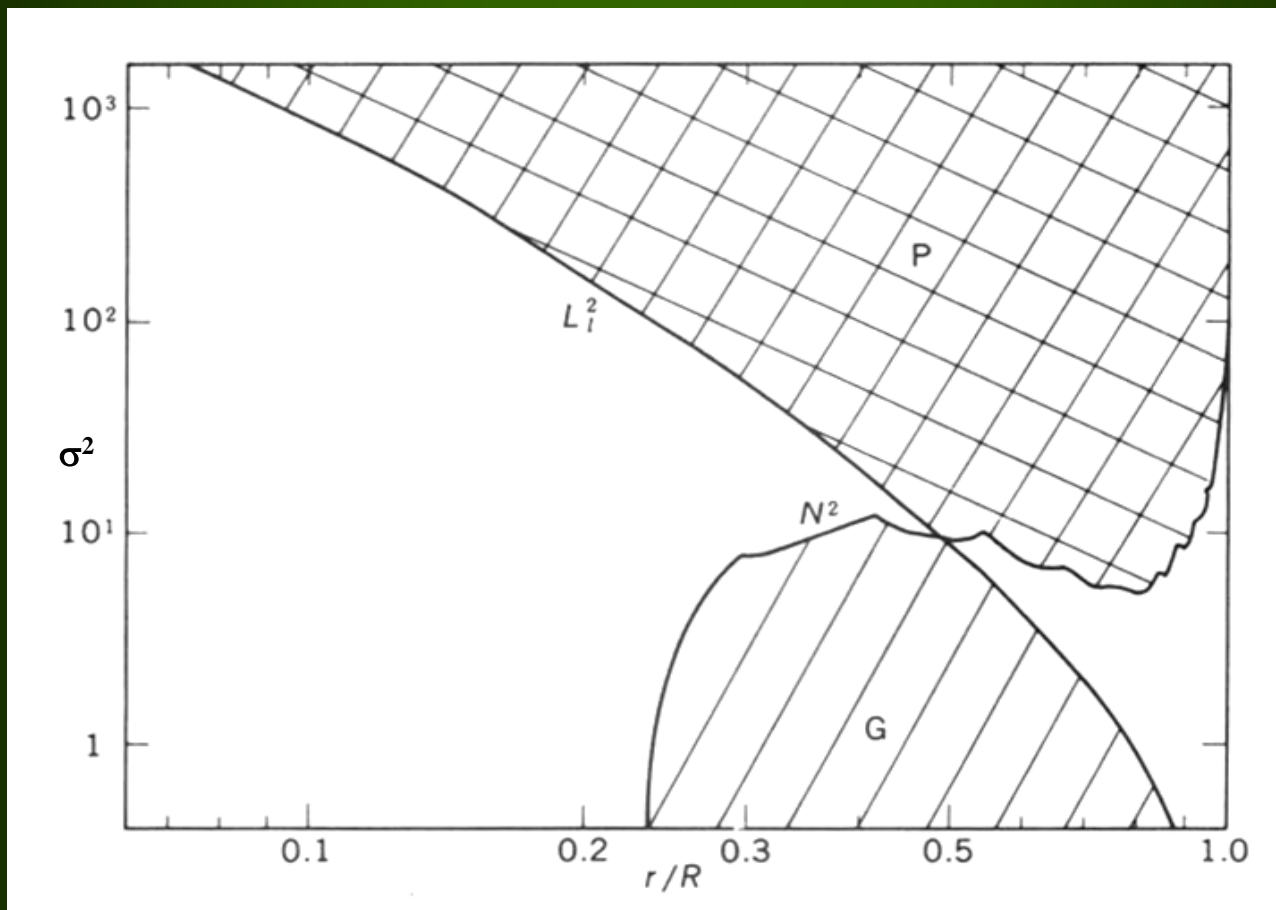
dla  $\nabla_{\mu} = 0$  kryteria te są równoważne

Konwekcja i  $\nabla_{\mu}$  znacznie modyfikują  $N^2$ .

**$N^2$**  dla modelu ZAMS oraz zmiany ewolucyjne  **$N^2$**   
są inne dla gwiazd masywnych ( $M > 1.3 M_{\odot}$ )  
i małomasowych ( $M < 1.3 M_{\odot}$ ).

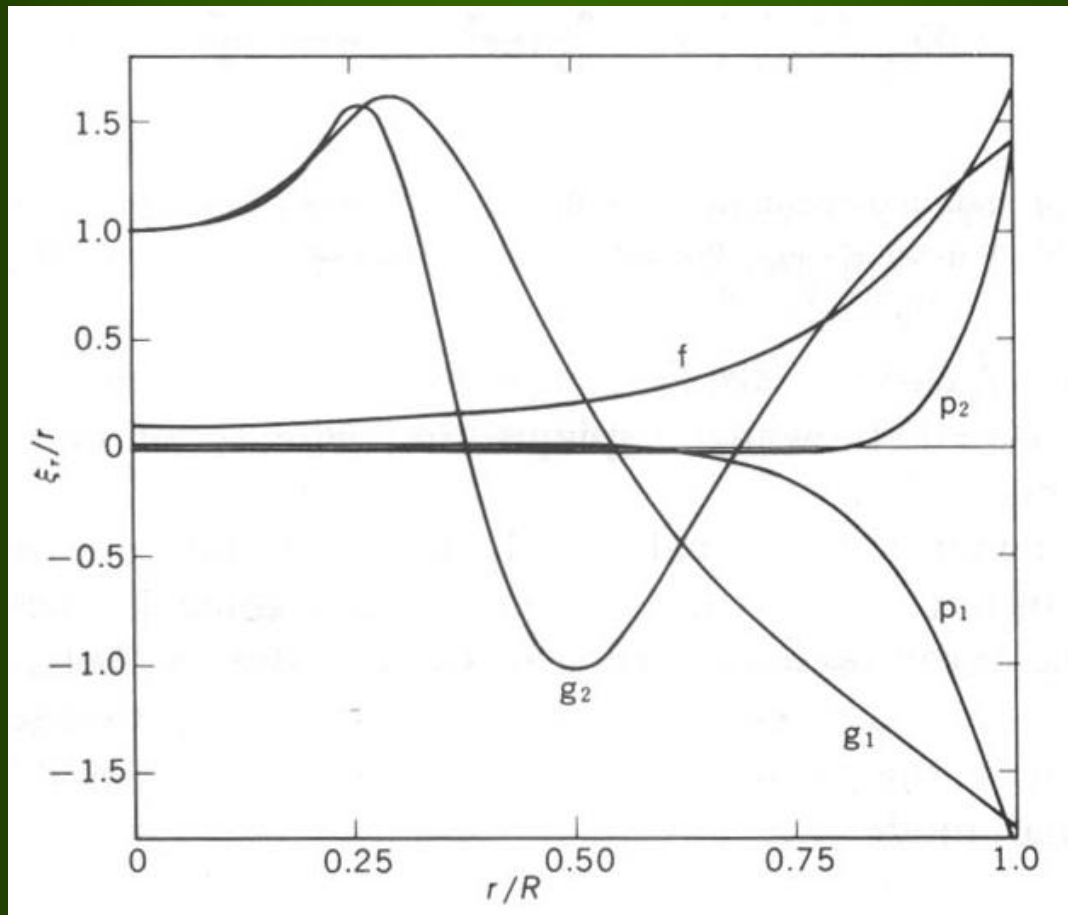
# © MASYWNA GWIAZDA CIĄGU GŁÓWNEGO

$M=10 M_{\odot}$ , ZAMS ( $X=0.7$ ),  $\ell=2$  (typ  $\beta$  Cep)

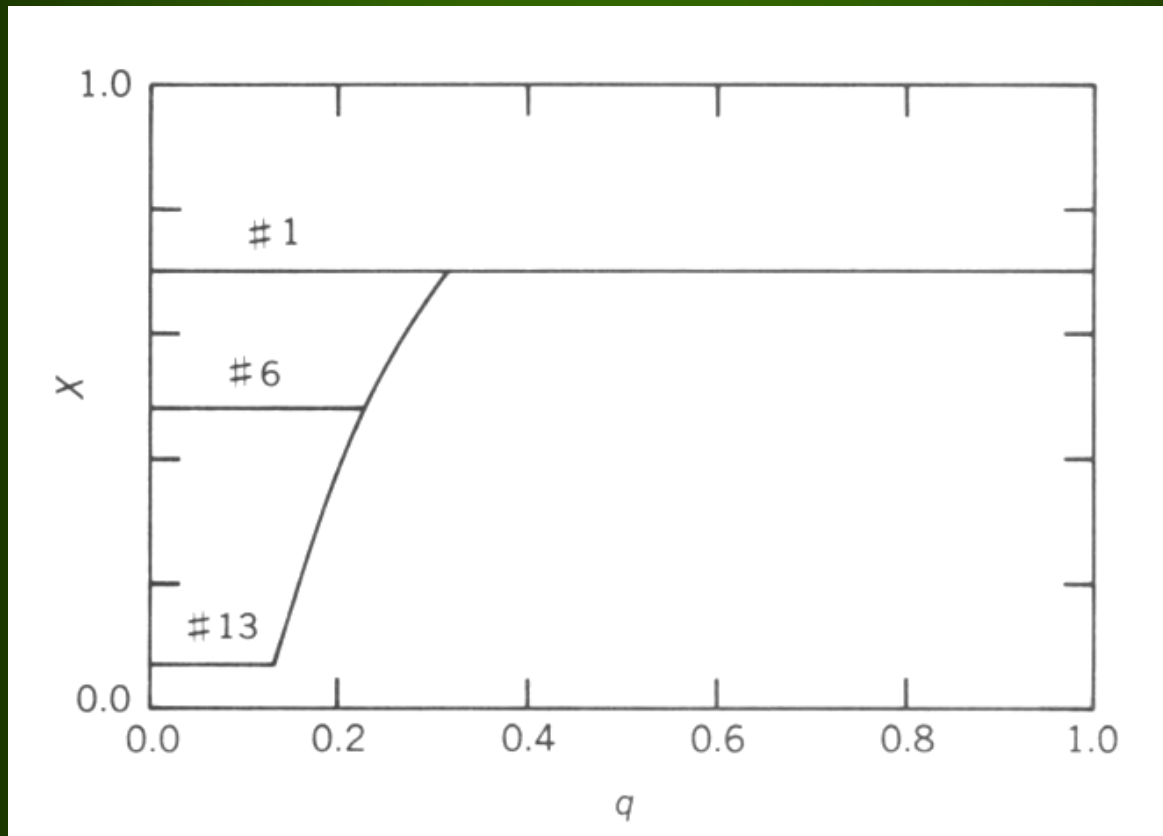




## Funkcje własne przesunięcia radialnego dla $\ell=2$

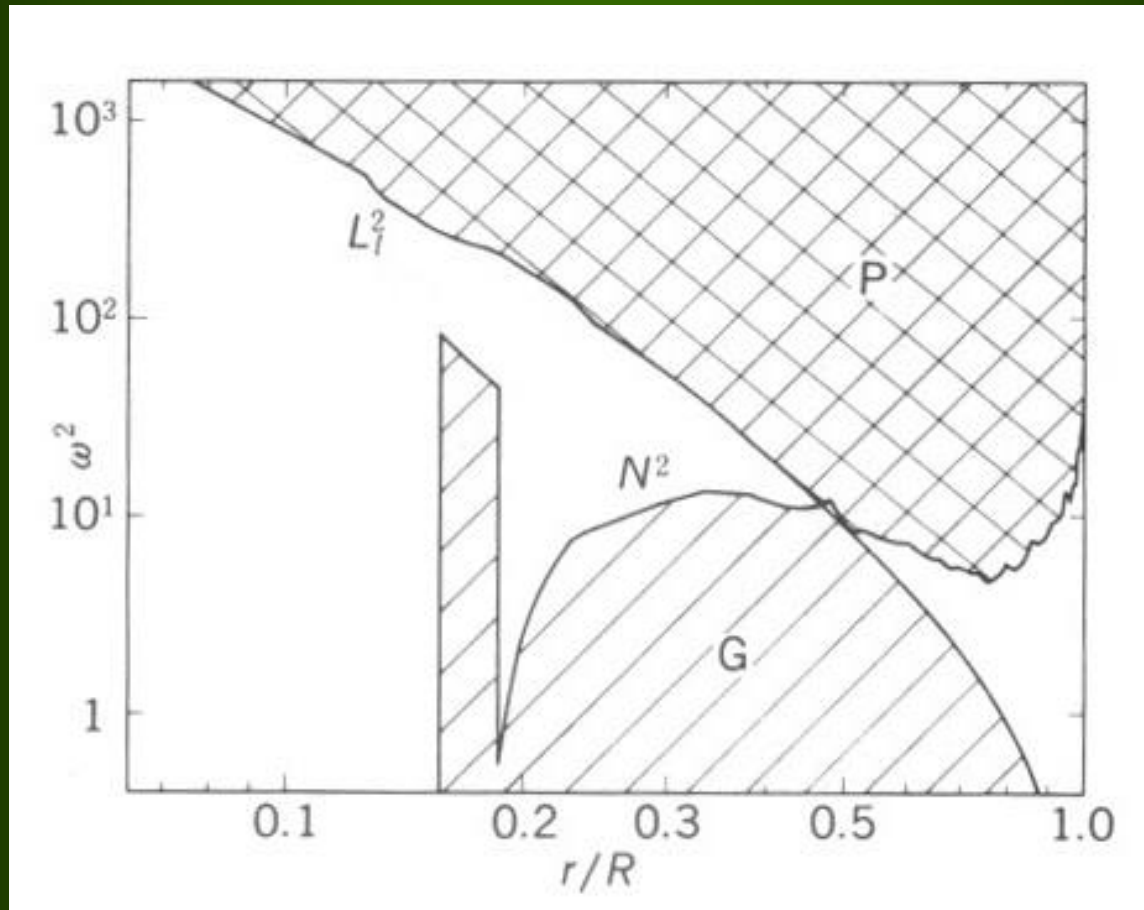


Rozkład **obfitości wodoru** we wnętrzu gwiazdy o masie  $M=10 M_{\odot}$  na różnych etapach ewolucji

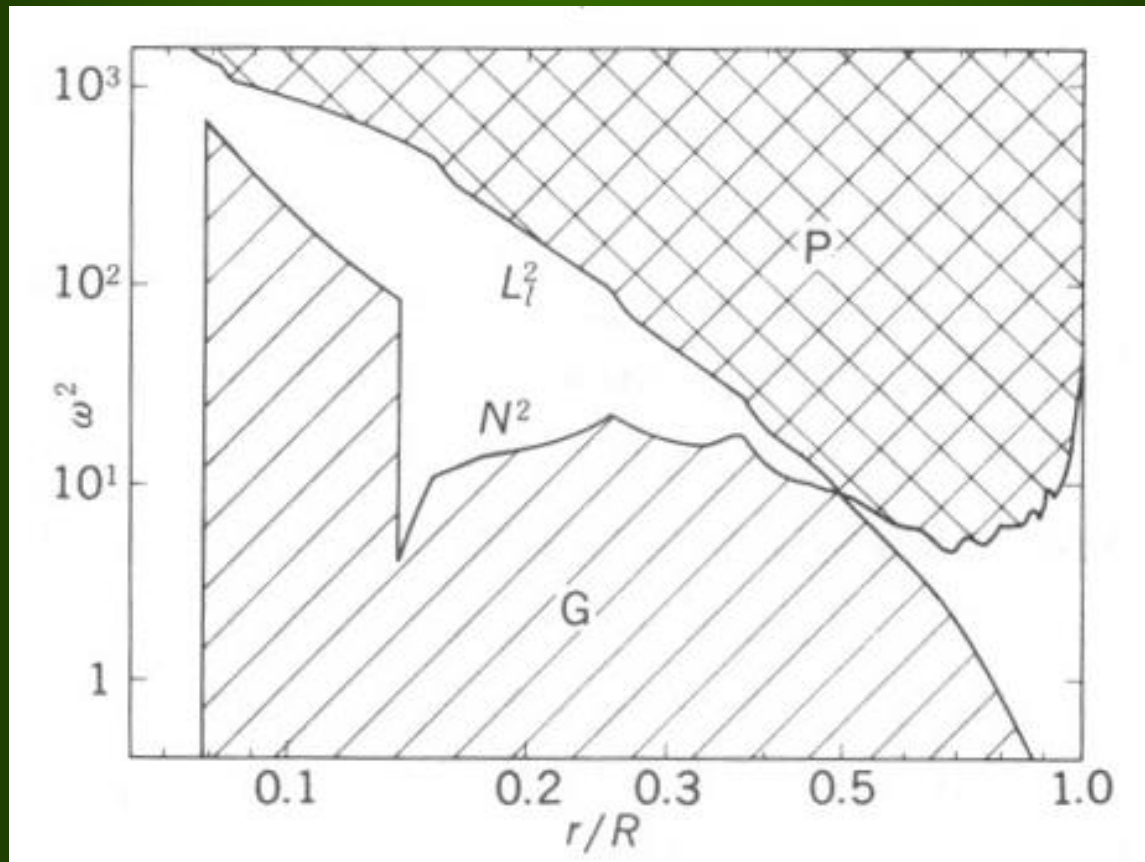


kurczące się jądro pozostawia obszar  
chemicznie niejednorodny  $\Rightarrow N^2$  rośnie

$M=10 M_{\odot}, X_c=0.48$

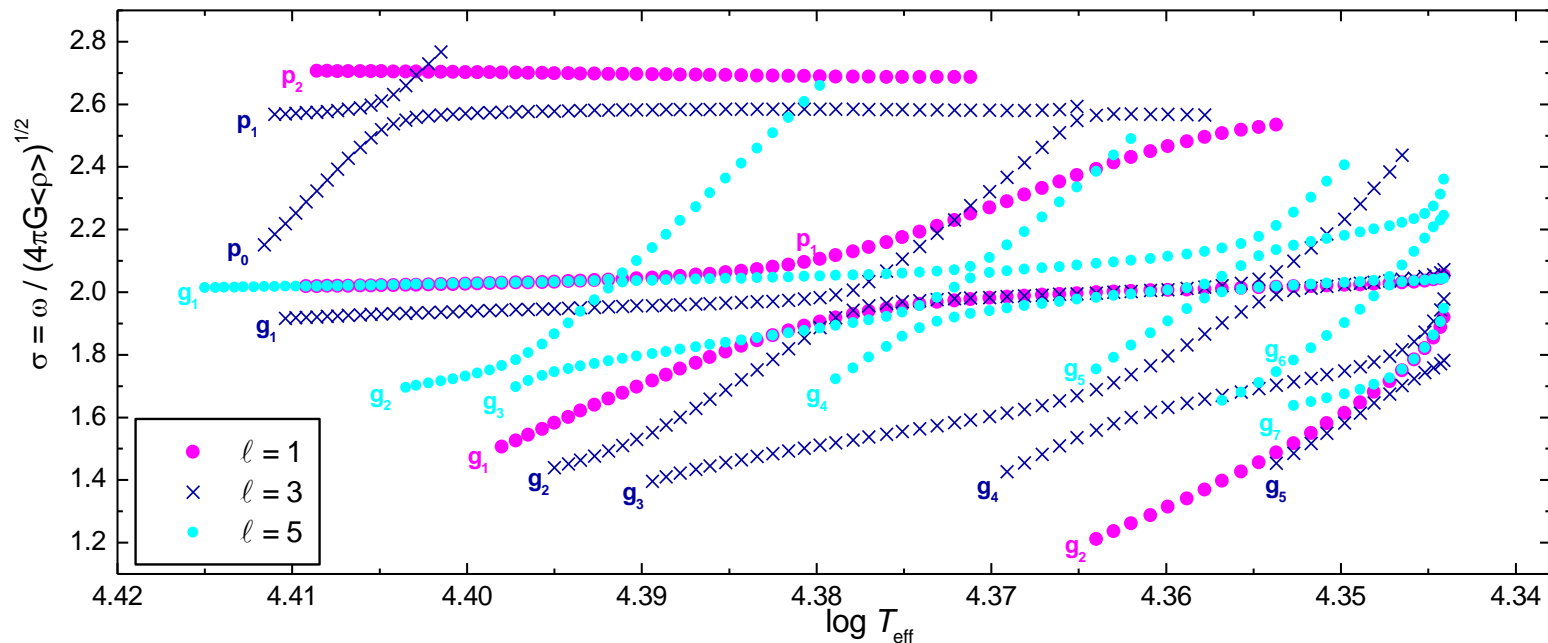
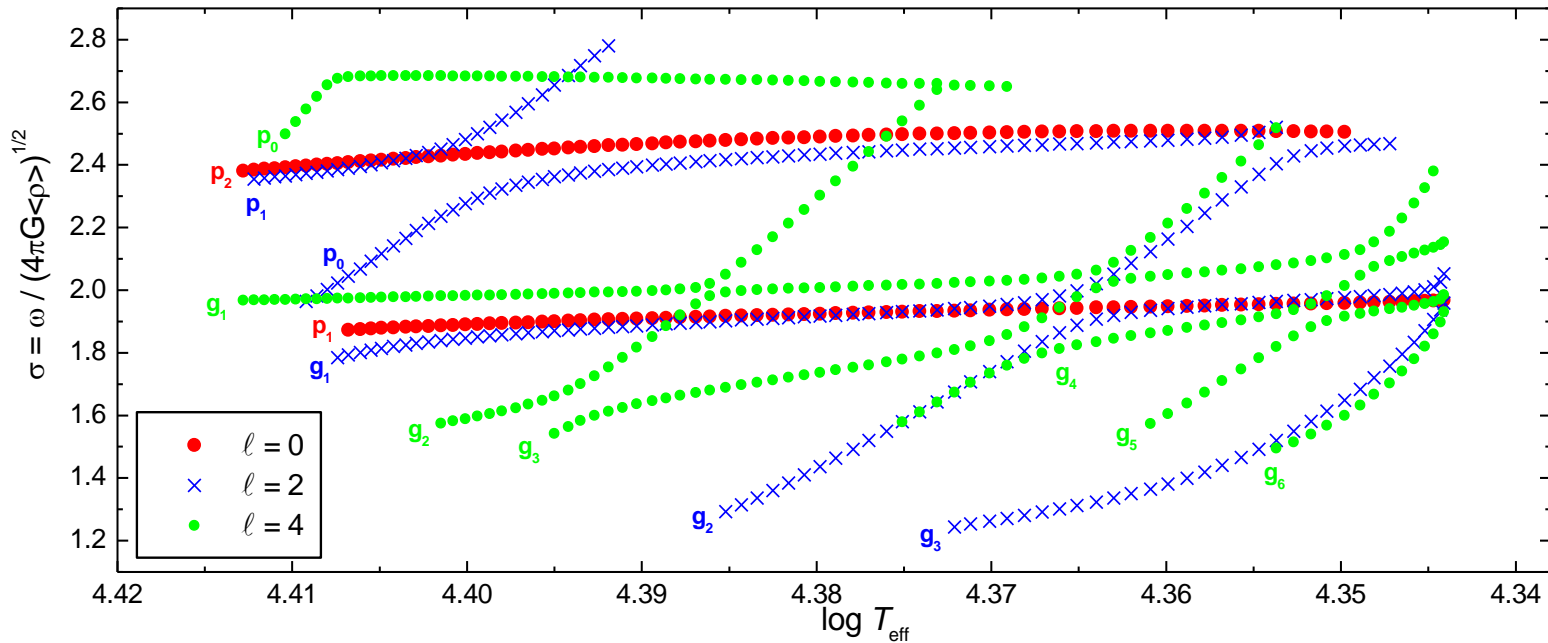


$M=10 M_{\odot}, X_c=0.07$



$$\nabla_{\mu} \uparrow \Rightarrow N^2 \uparrow \Rightarrow \omega_g \uparrow$$

# Ewolucja $\sigma$ na MS dla gwiazdy o masie $M=12 M_{\odot}$



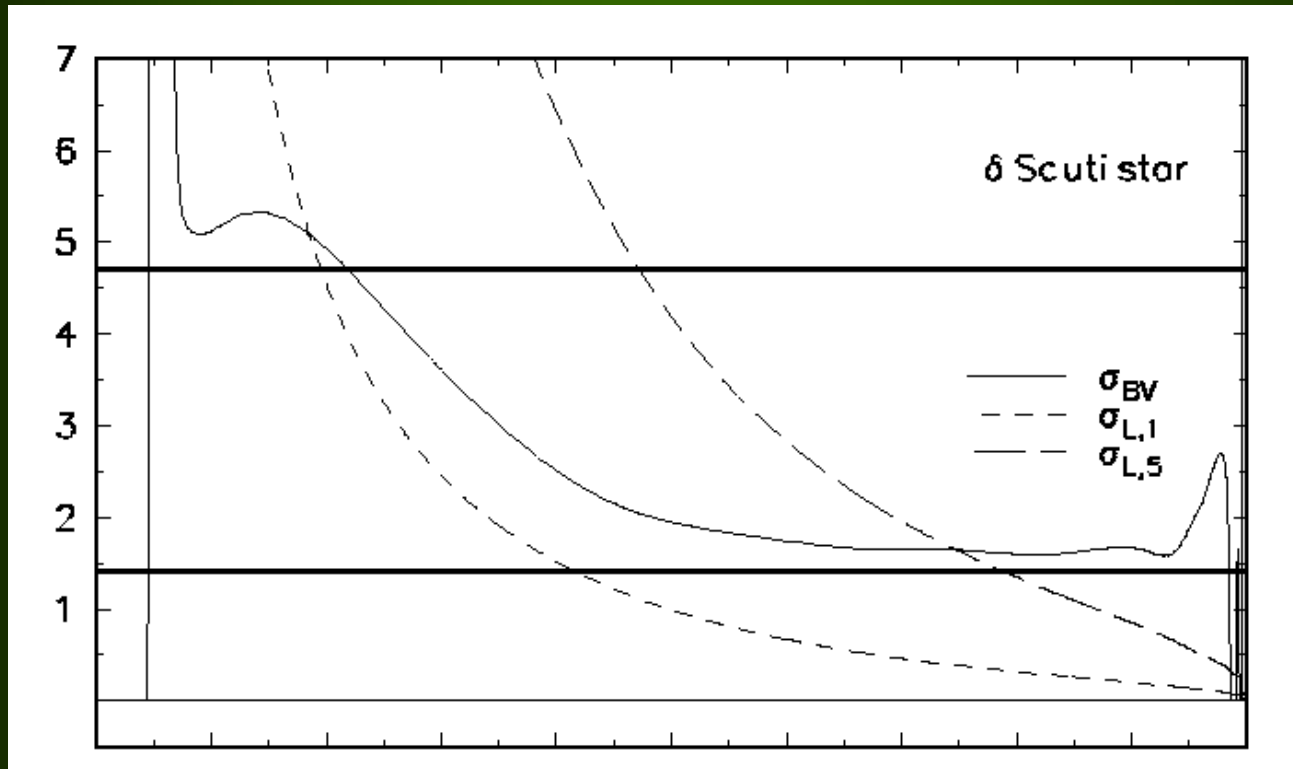
**Mody radialne:**  $\sigma = \text{const}$ , bo  $P\sqrt{\rho} = \text{const}$

**Mody nieradialne:**

- 1) Zjawisko „**avoided crossing**” (unikanie „przecięć”) - efekt oddziaływania między modami, dwa mody nie mogą mieć tej samej częstotliwości.
- 2) **przełączanie modów** – podczas „**avoided crossing**” charakter dwóch modów jest wymieniany



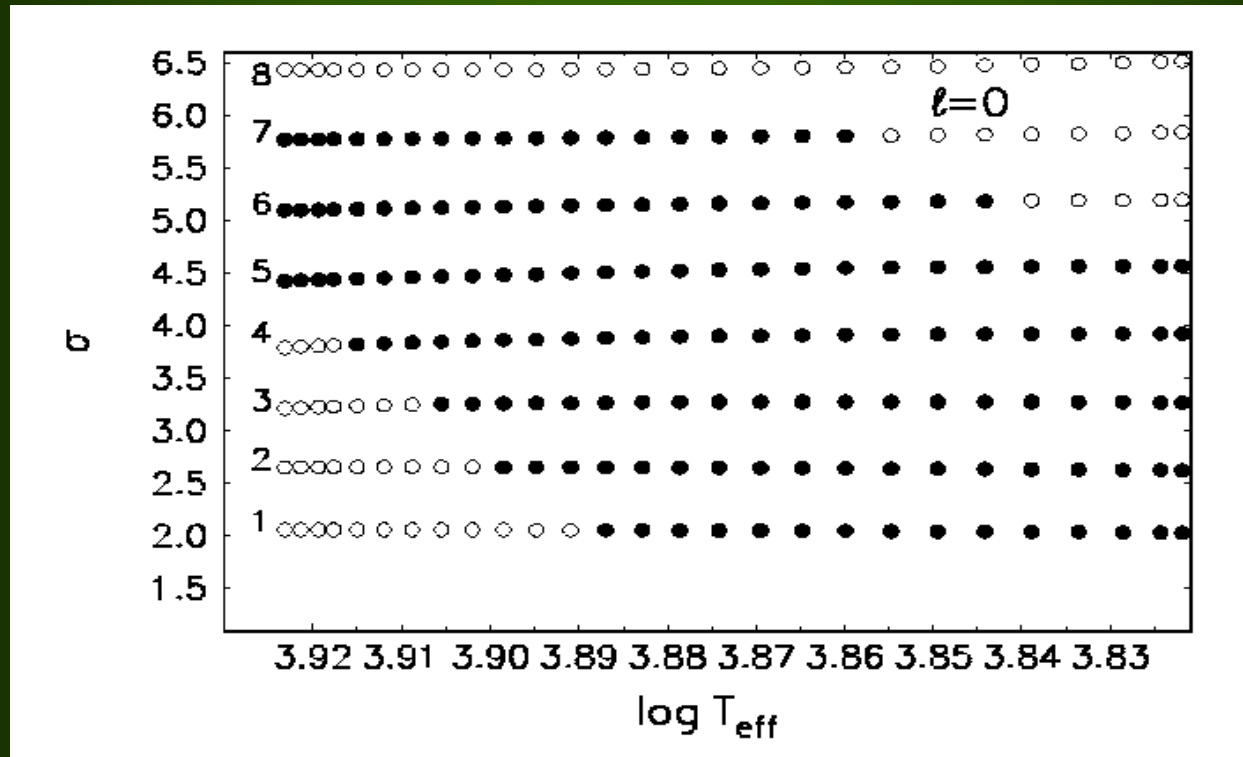
$M=1.8 M_{\odot}$ ,  $X=0.05$  (typ  $\delta$  Sct)



Linie poziome – obszar modów niestabilnych

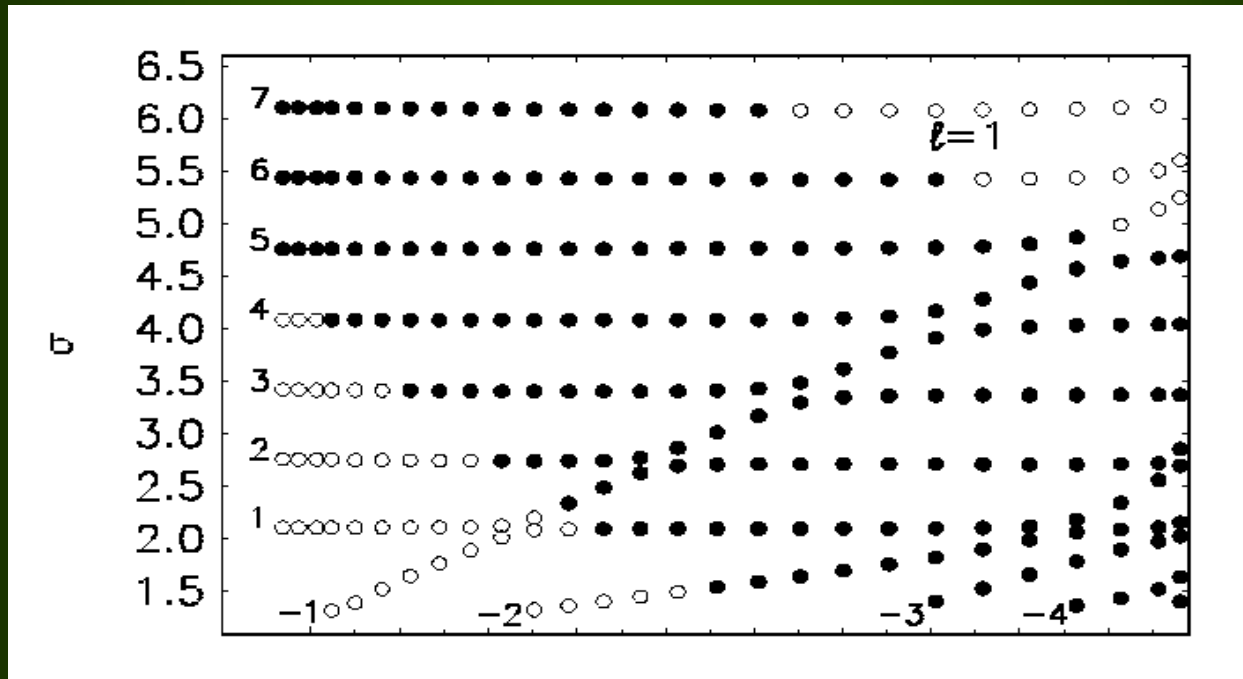
# Ewolucja $\sigma$ na MS dla gwiazdy o masie $M=1.8 M_{\odot}$

$$\ell=0$$



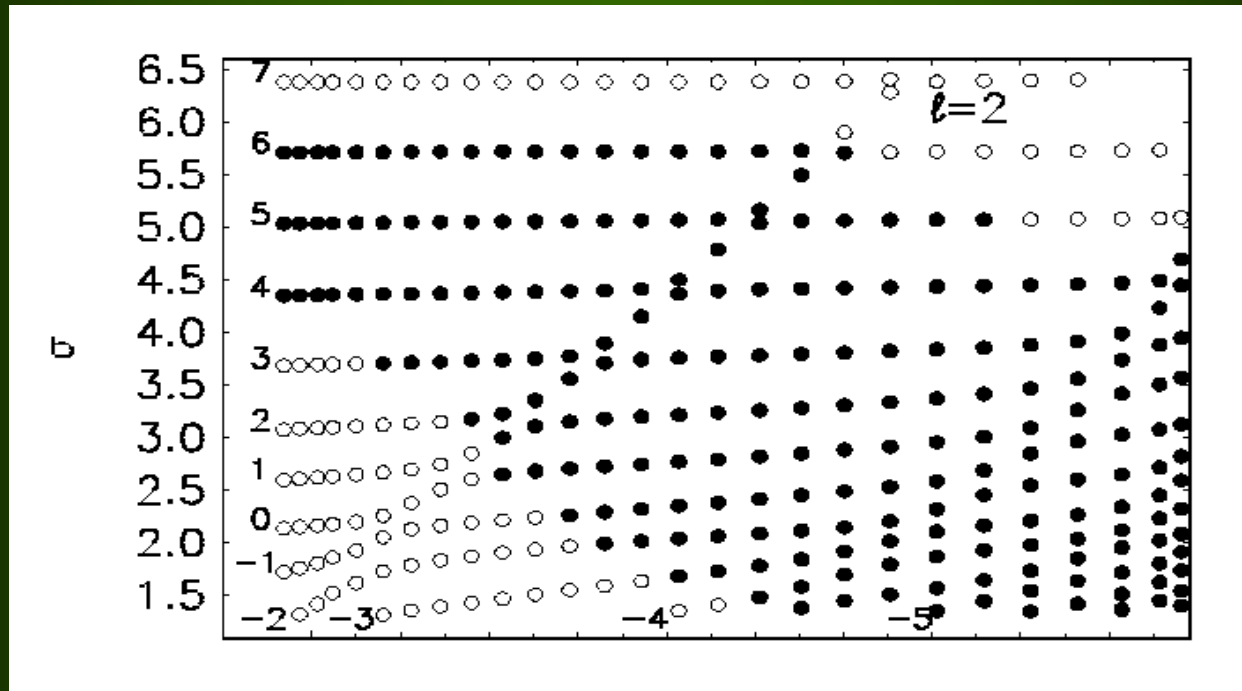
# Ewolucja $\sigma$ na MS dla gwiazdy o masie $M=1.8 M_{\odot}$

$$\ell=1$$



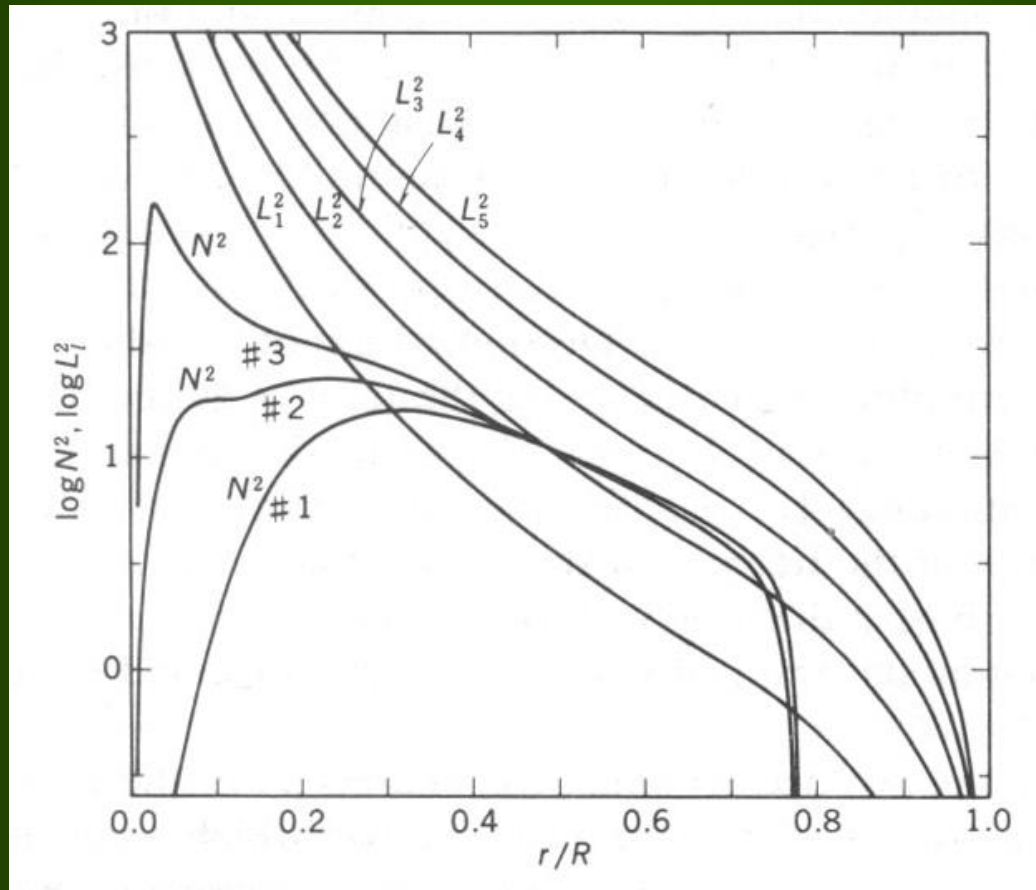
# Ewolucja $\sigma$ na MS dla gwiazdy o masie $M=1.8 M_{\odot}$

$$\ell=2$$

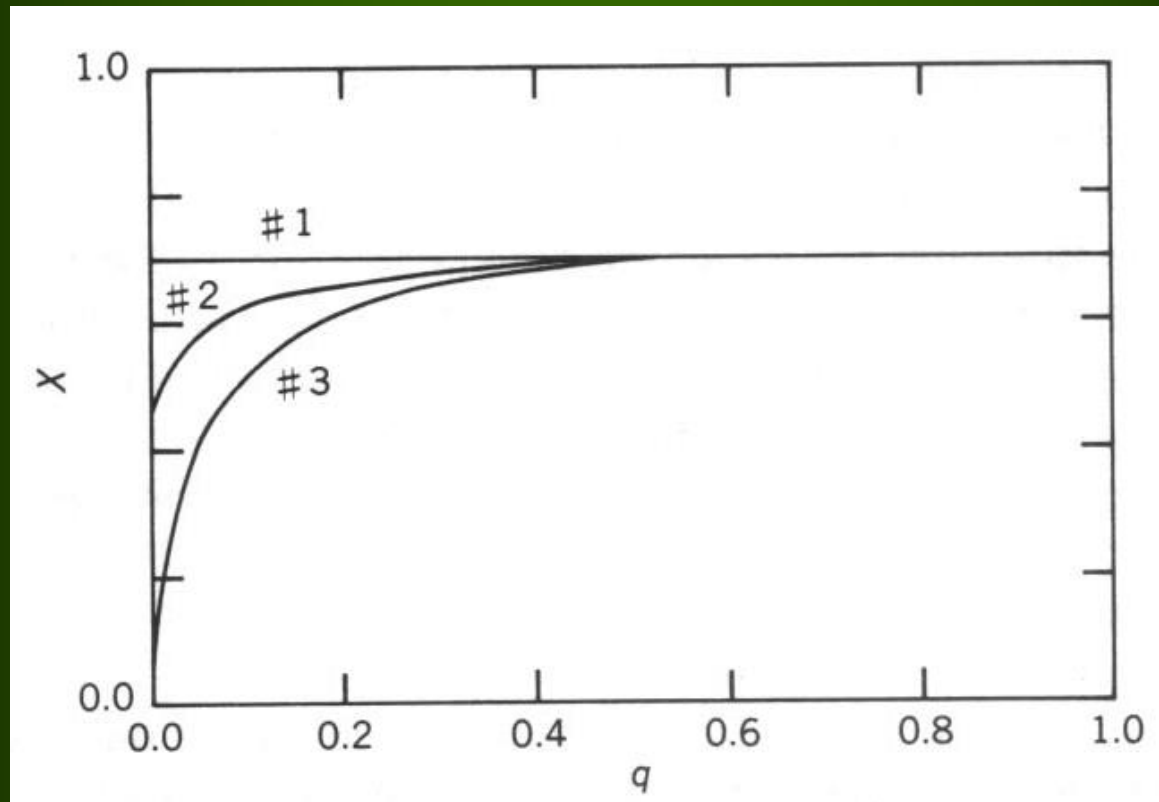


# © MAŁOMASYWNA GWIAZDA CIĄGU GŁÓWNEGO

Model  $M=1 M_{\odot}$  na ZAMS (#1) i dwóch bardziej zaawansowanych etapach ewolucji (#2 i #3)



Rozkład **obfitości wodoru** we wnętrzu gwiazdy o masie  $M=1 M_{\odot}$  na różnych etapach ewolucji



wodór pali się w reakcjach p-p



jądro promieniste



łagodny gradient  $\mu$

# Diagram propagacji dla modelu **Słońca** z uwydatnieniem warstw atmosferycznych

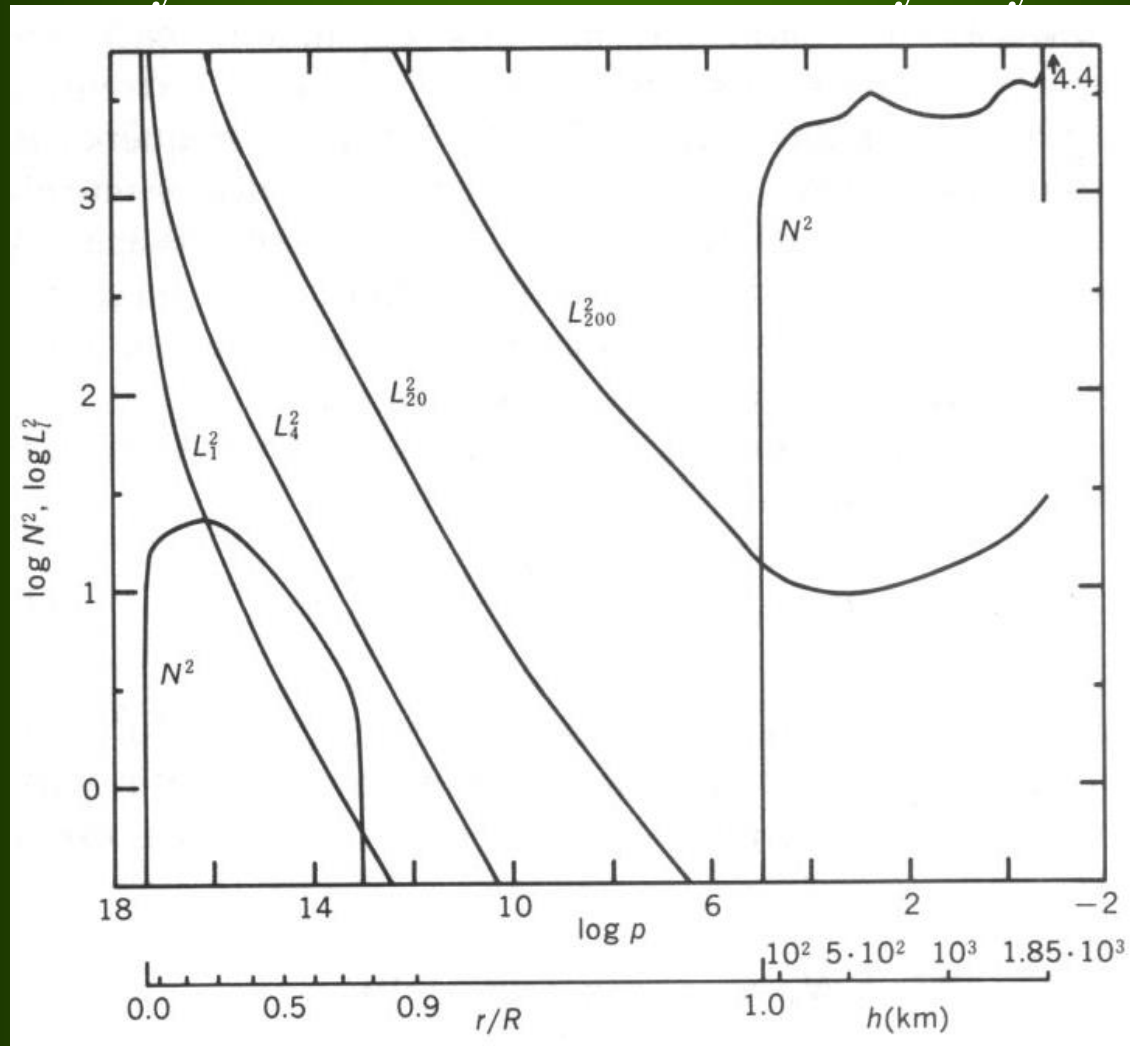
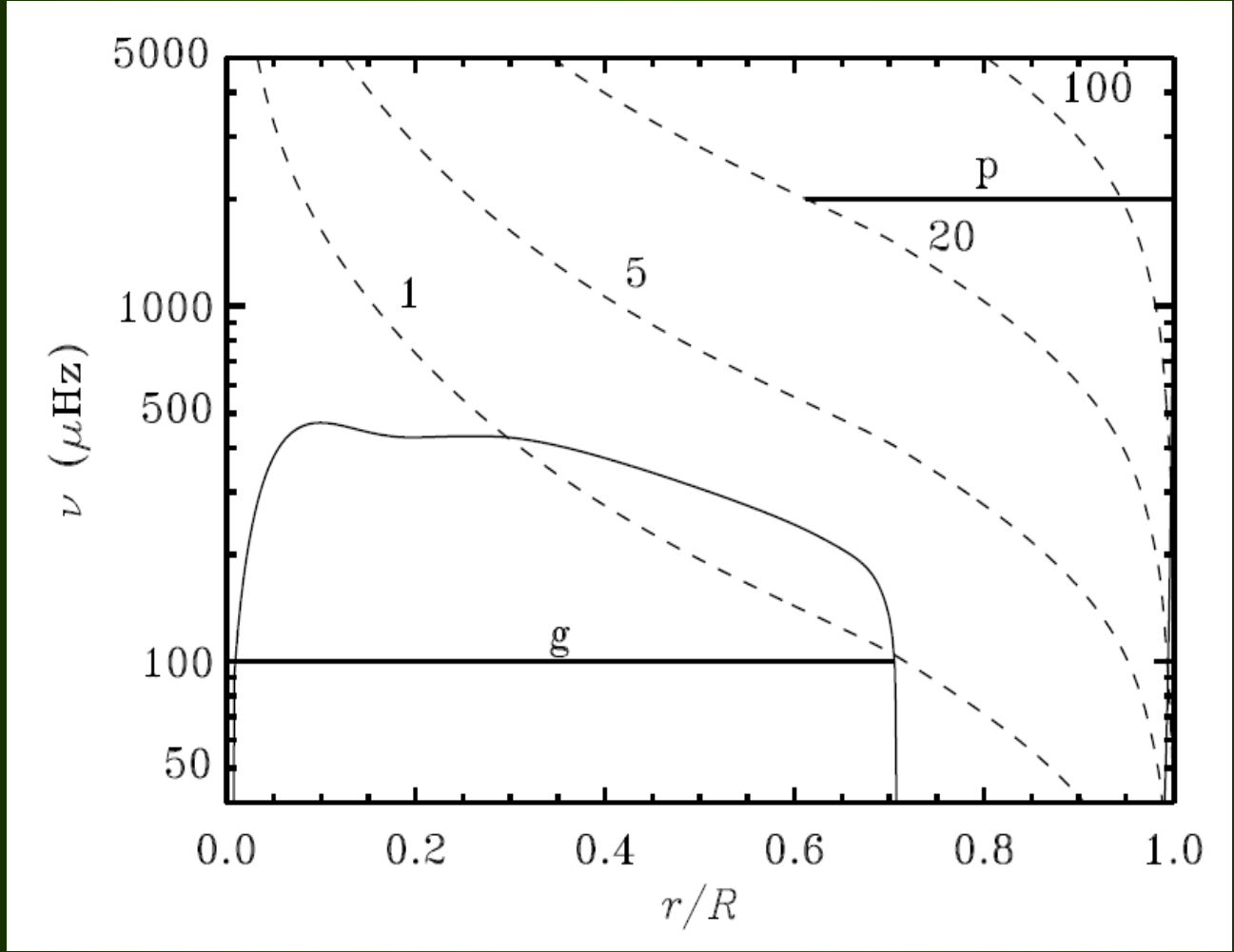
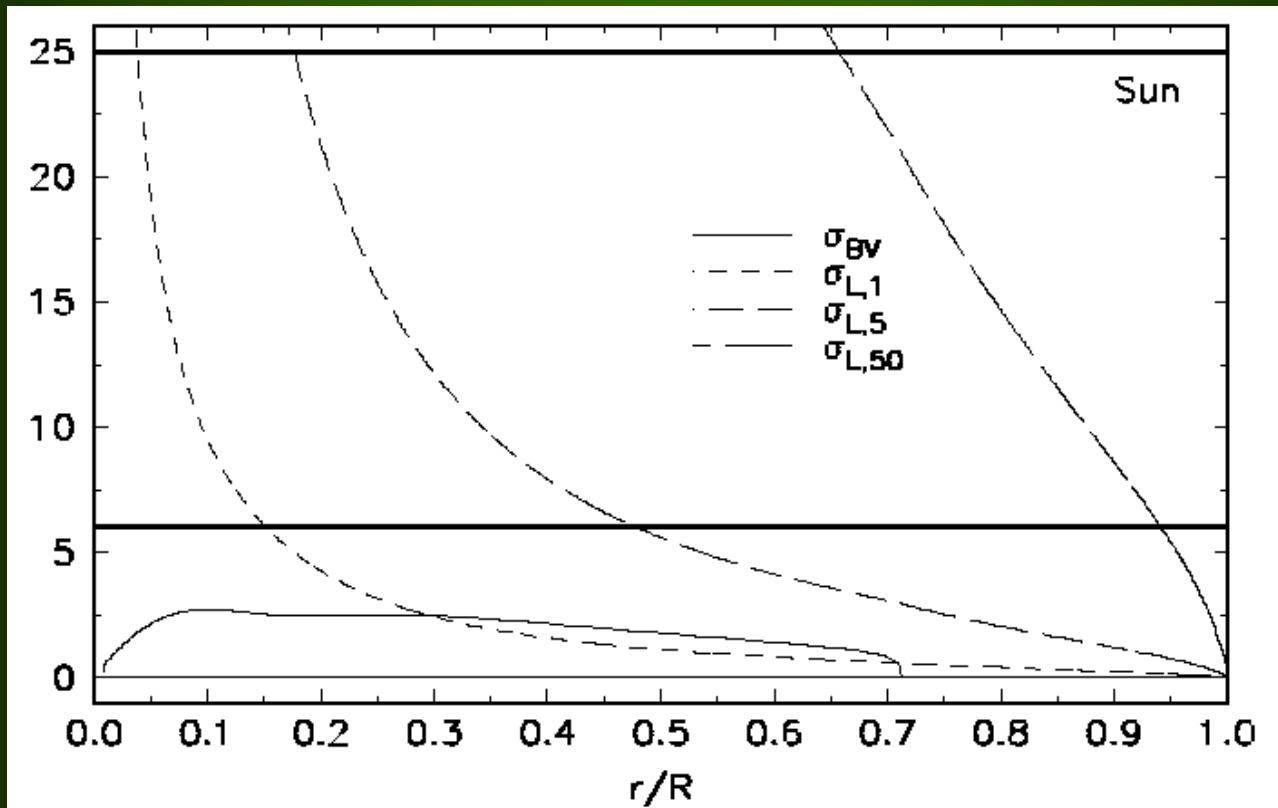




Diagram propagacji dla obecnego modelu **Słońca**.  
Obszary pułpkowania: mod p -  $\ell=20$ ,  $\nu=2000 \mu\text{Hz}$ , mod g -  $\nu=100 \mu\text{Hz}$

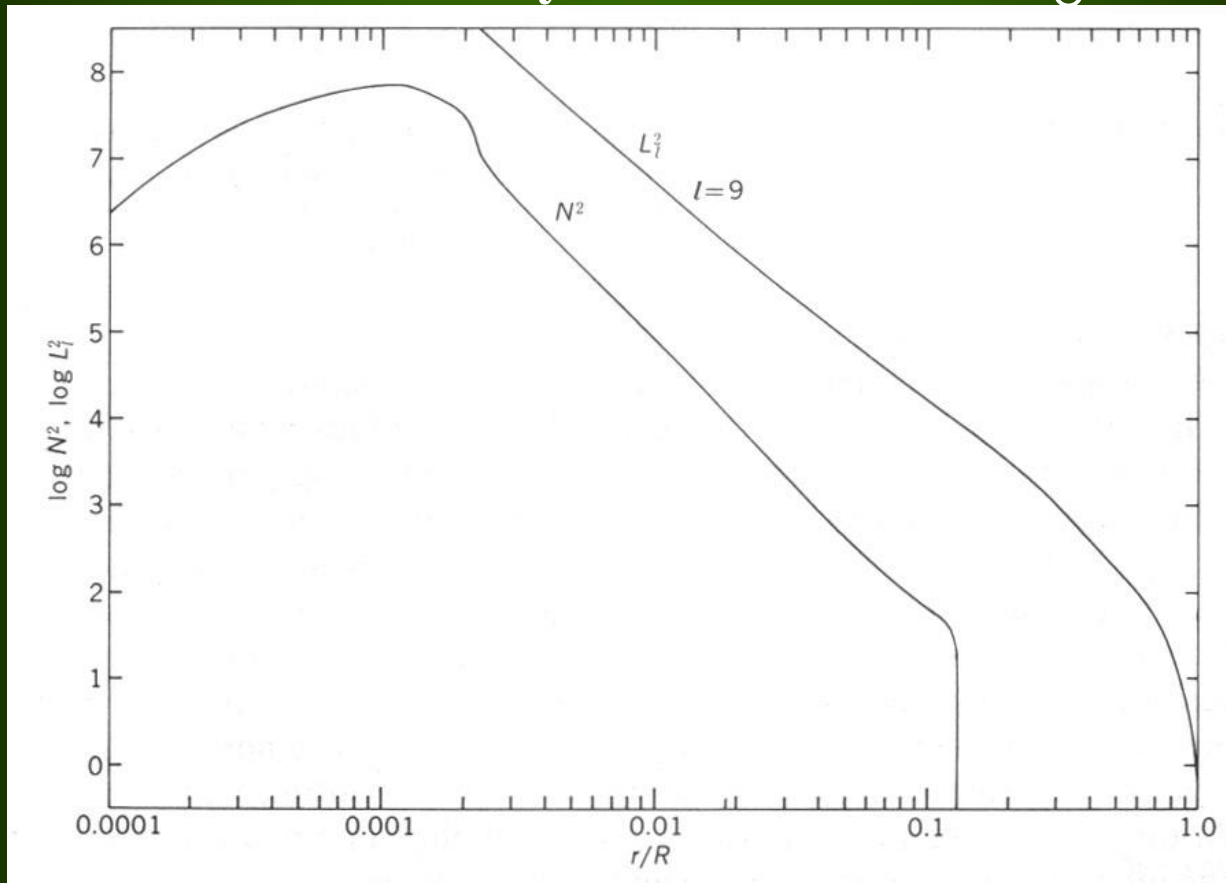


## Diagram propagacji dla obecnego modelu **Słońca**



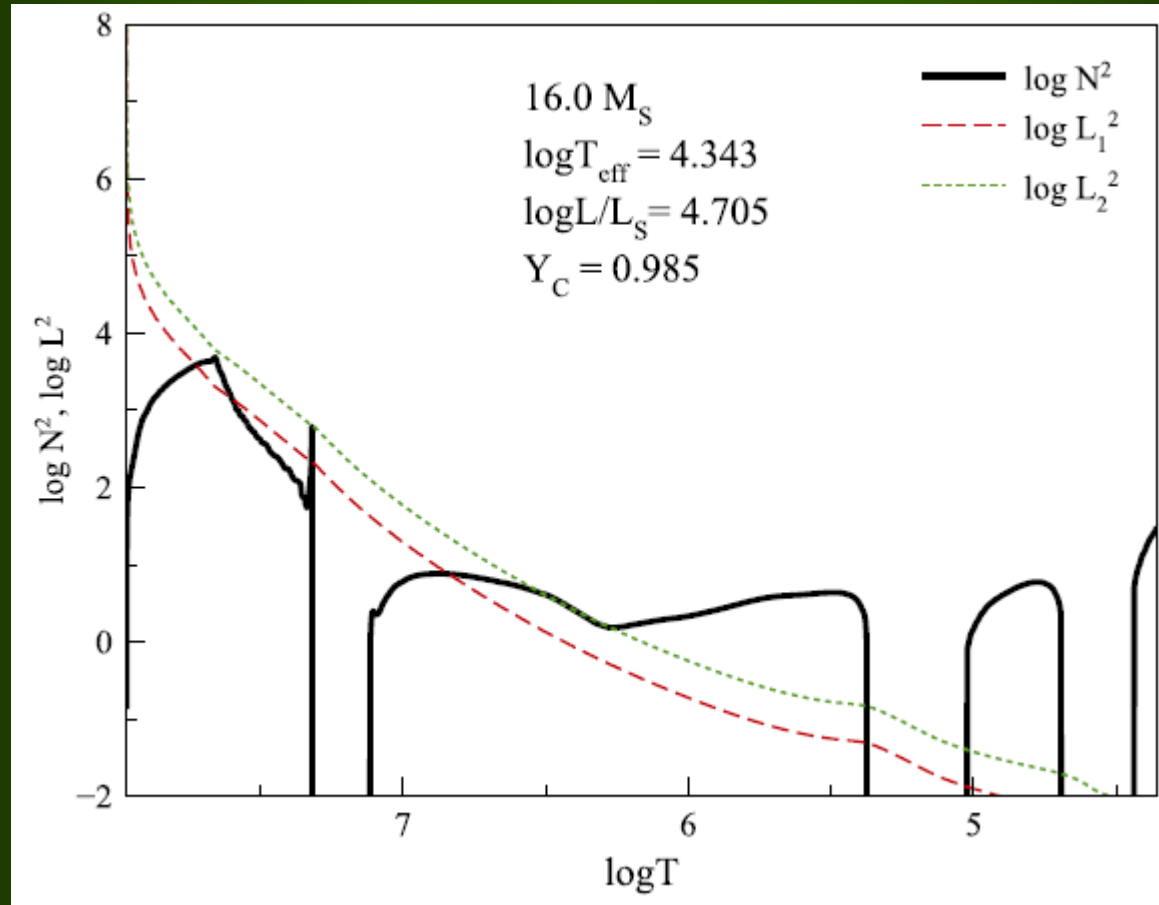
Linie poziome – zakres modów z dokładnie  
wyznaczonymi częstotliwościami

Model olbrzyna o masie  $M=5 M_{\odot}$



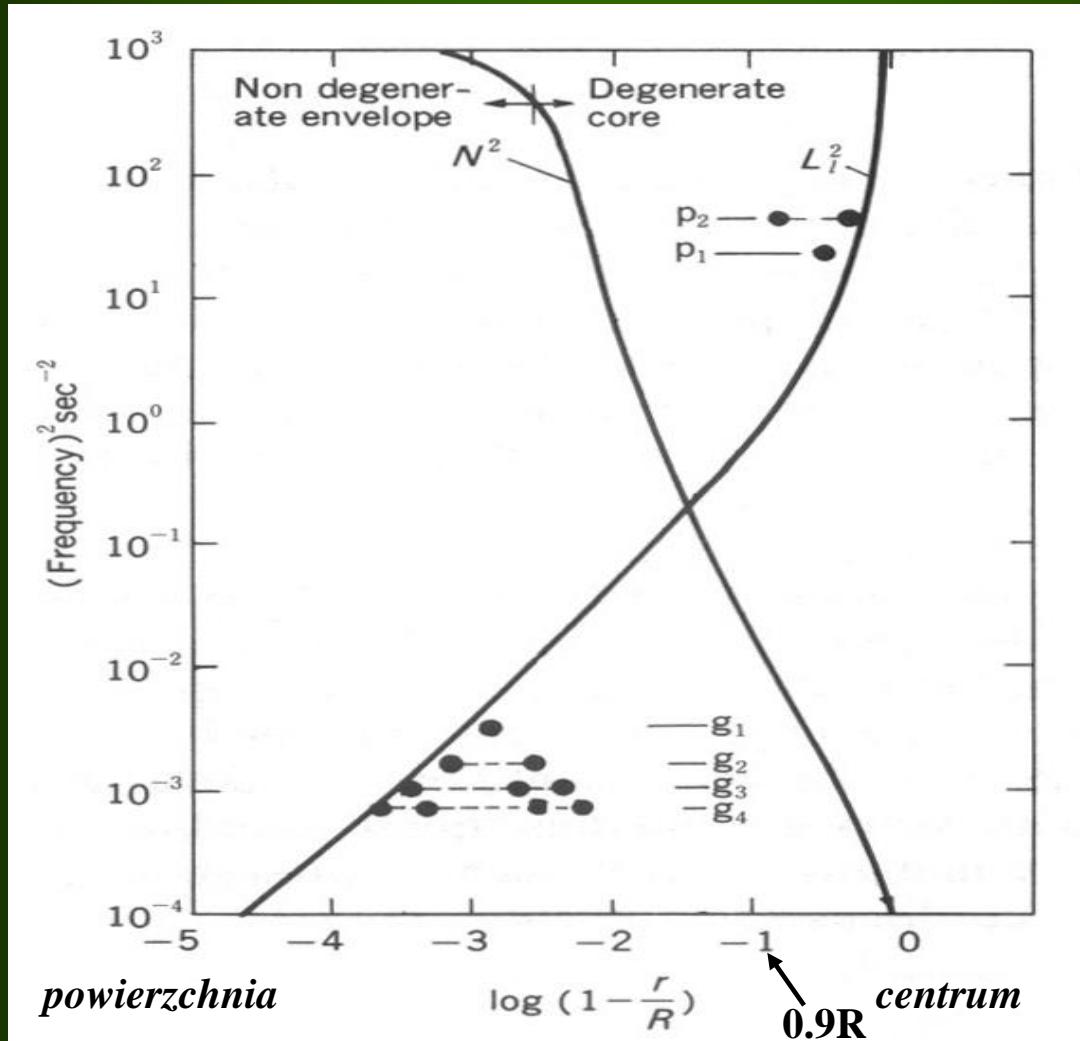
© NADOLBRZYM

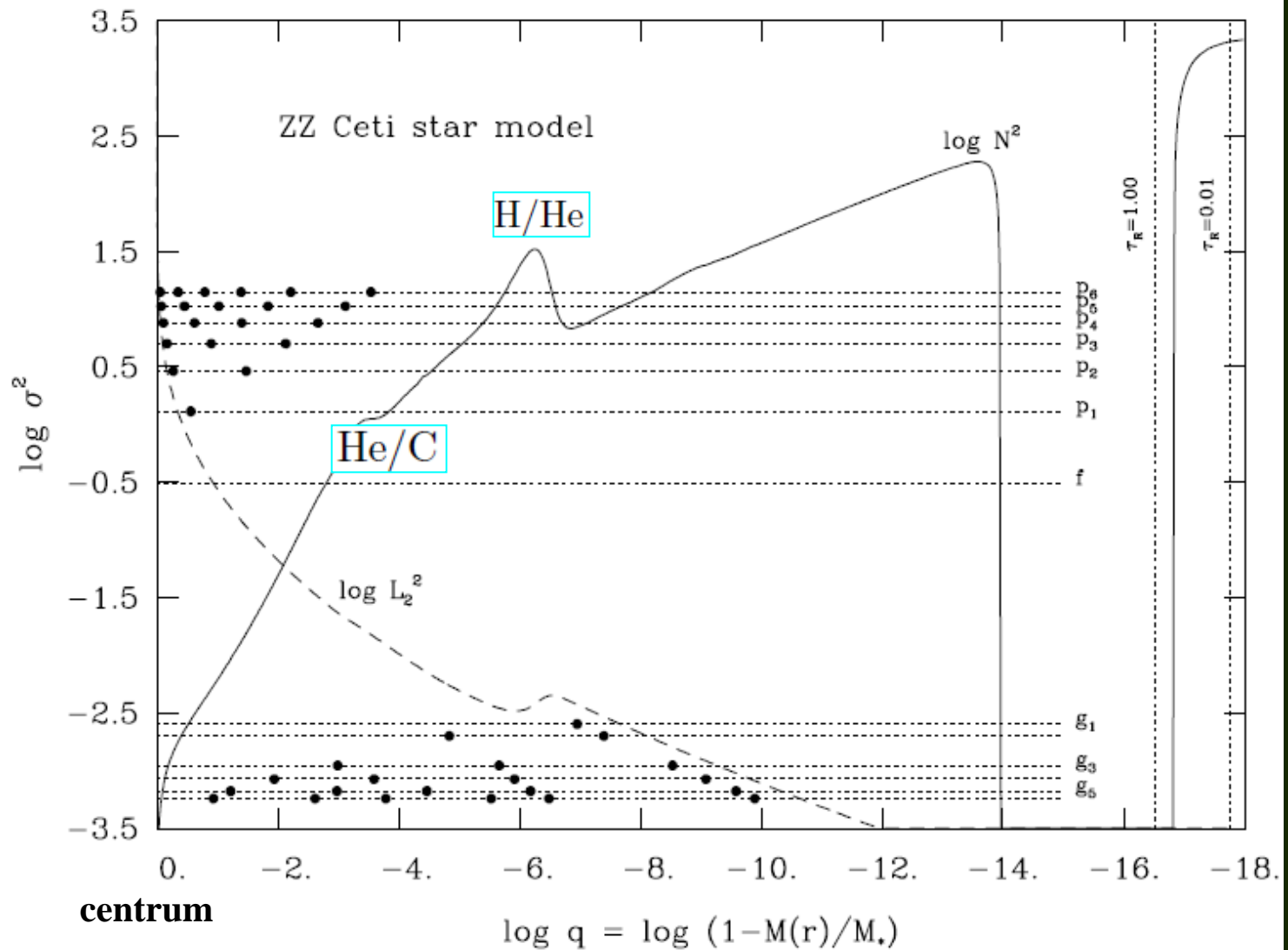
## Model nadolbrzyna o masie $M=16 M_{\odot}$



# © BIAŁY KARZEŁ

Model białego karła o masie  $M=1 M_{\odot}$ ,  $\log L/L_{\odot} = -4.2$ ,  $\log T_{\text{eff}}=3.83$

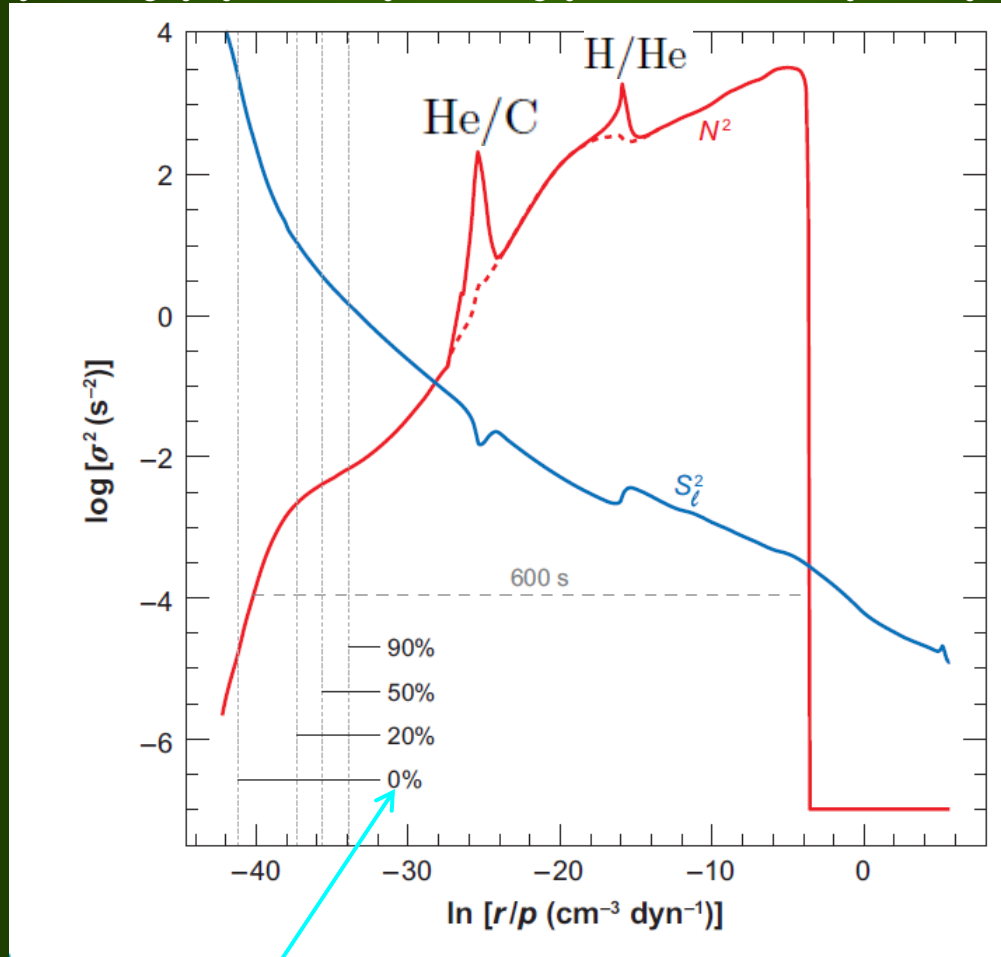




kropki - położenie węzłów radialnej funkcji własnej

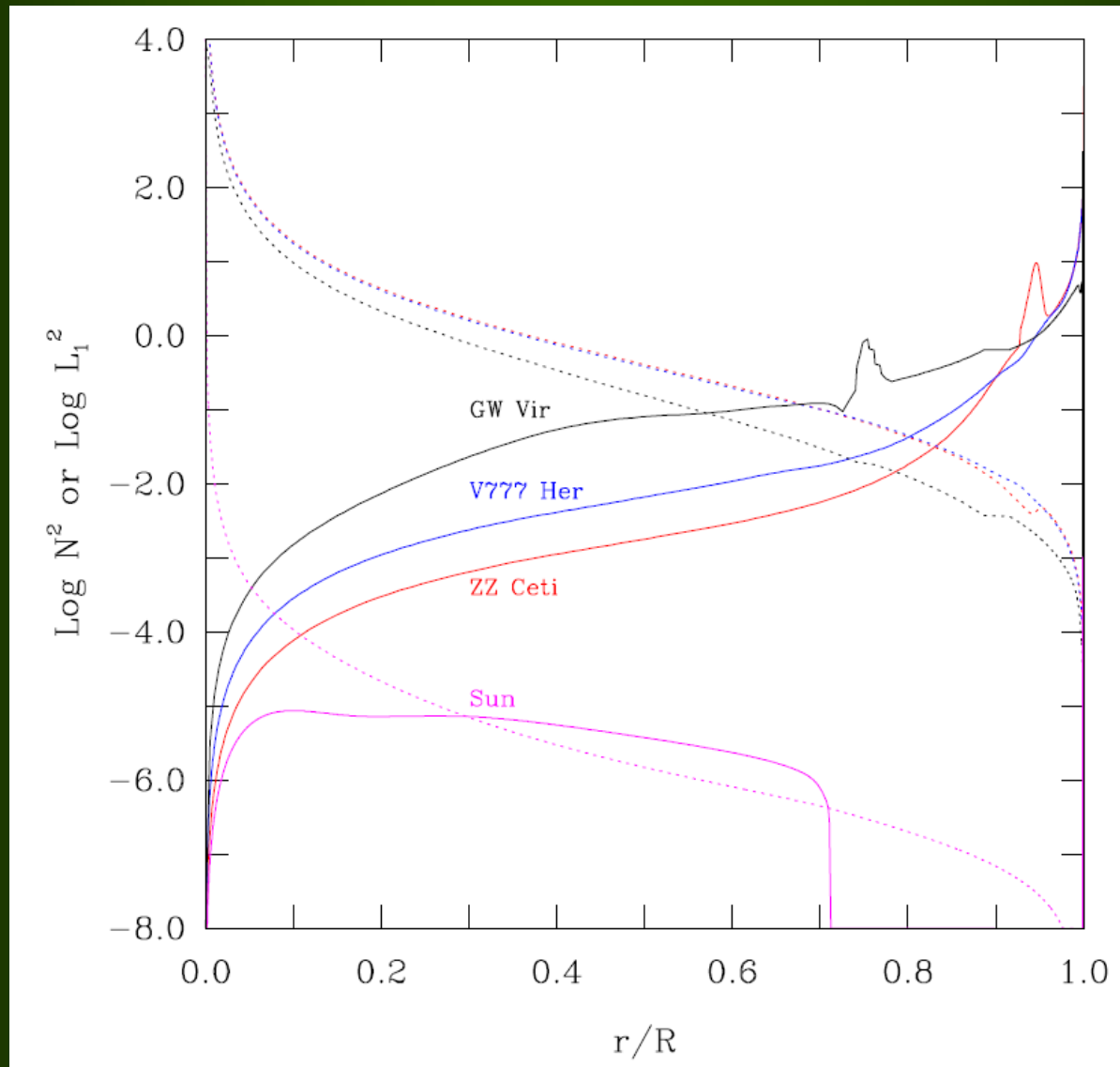
# © BIAŁY KARZEŁ

model białego karła DAV  $M=1.1 M_{\odot}$   
uwzględniający stratyfikację chemiczną i krystalizację



Ilość skryzalizowanej masy

# Porównanie diagramu propagacji dla białych karłów różnych typów i Słońca





## OPIS ASYMPTOTYCZNY

Bardziej kompletny opis uzyskujemy badając asymptotyczne właściwości równań pulsacyjnych

$$\Psi = c^2 \rho^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \vec{\xi}$$

*równania oscylacyjne przybliżamy przez*

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} = -K(r) \Psi$$

*gdzie*

$$K(r) = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_\ell^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \right]$$

$$\omega_c^2 = \frac{c^2}{4H^2} \left( 1 - 2 \frac{dH}{dr} \right), \quad H = - \left( \frac{d \ln \rho}{dr} \right)^{-1}$$

$\omega_c$  - częstotliwość obcięcia, dla  $\omega < \omega_c$  fala zanika

Zachowanie  $\xi_r$  zależy lokalnie od znaku  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ .

Rozwiązania mają postać:

$$\xi_r \sim \cos \left( \int \mathbf{K}^{1/2} dr + \varepsilon \right) \quad \text{dla } \mathbf{K} > 0$$

$$\xi_r \sim \exp \left( \pm \int |\mathbf{K}|^{1/2} dr \right) \quad \text{dla } \mathbf{K} < 0$$

czyli

$\mathbf{K} > 0 \Rightarrow \xi_r$  jest oscylującą funkcją  $r$

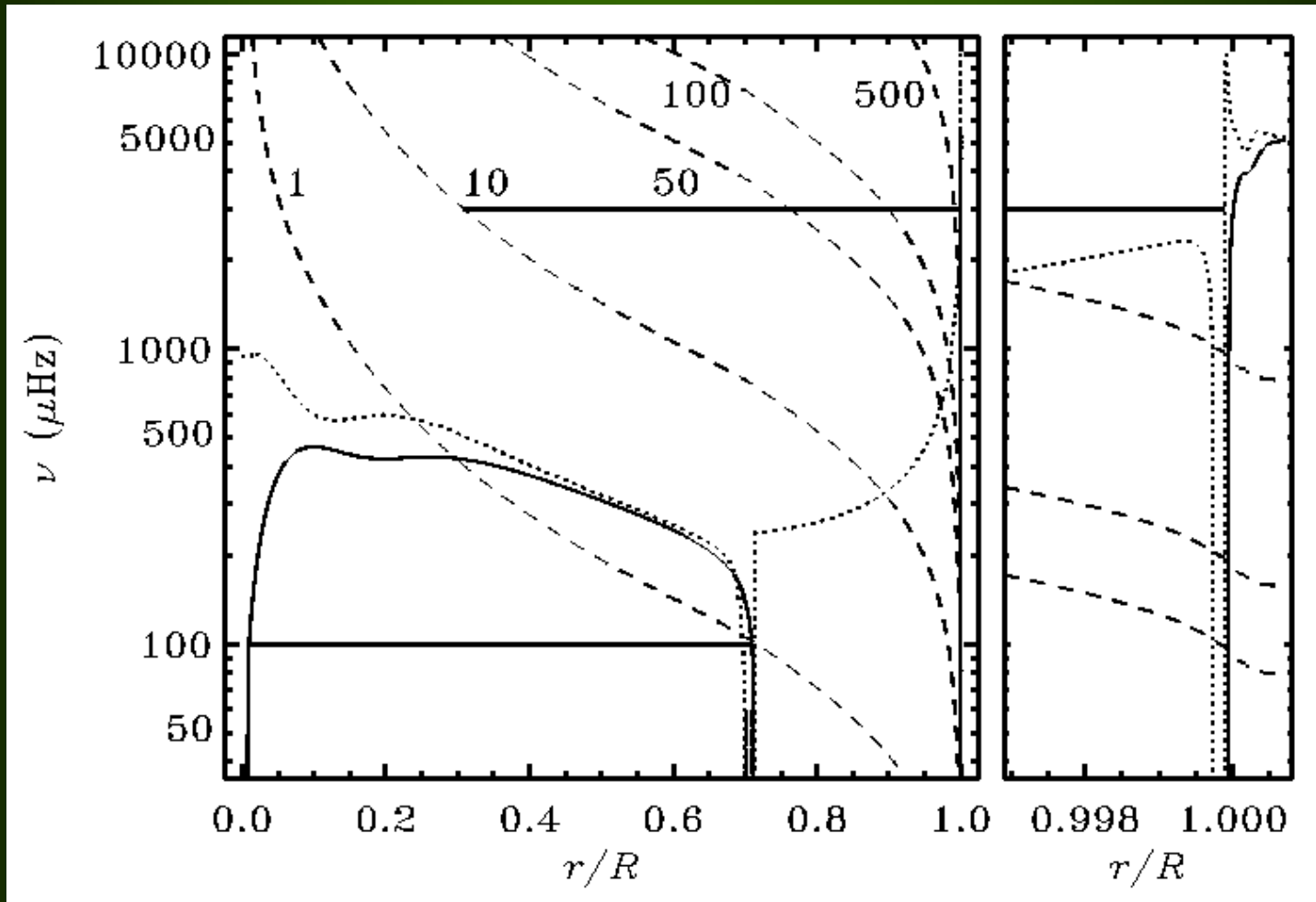
$\mathbf{K} < 0 \Rightarrow$  rozwiązanie jest eksponencjalnie  
rosnącą lub malejącą funkcją  $r$

$\mathbf{K} = 0 \Rightarrow$  punkty odbicia (zwrotne)

**Zachowanie modu oscylacji jest kontrolowane  
przez trzy częstotliwości charakterystyczne:**

$$S_\ell, N, \omega_c$$

Częstotliwości charakterystyczne dla modelu Słońca:  
 $N/2\pi$  (linia ciągła),  $S_\ell$  (linia przerywana),  $\omega_c/2\pi$  (linia kropkowana),  
 dla  $\ell=1, 10, 50, 100$  i  $500$ . Linie poziome – obszary pułapkowania  
 dla modu  $p$  ( $3000\mu\text{Hz}$ ) o  $\ell=10$  i modu  $g$  ( $100\mu\text{Hz}$ ).



**mody p** ( $\omega \gg N, \omega_c$ ) - w wyrażeniu na  $K(r) (\equiv k_r^2)$  możemy zaniedbać  $N$  i  $\omega_c$

$$k_r^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{S_\ell^2}{\omega^2} \right)$$

wewnętrzny punkt odbicia,  $r=r_t$ ,  $\omega \approx S_\ell(r_t)$ , tj.  $k_r=0$ , czyli

$$\frac{c(r_t)}{r_t} = \frac{\omega}{L}, \quad L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}$$

Blisko powierzchni,  $S_\ell \ll \omega$ , a zewewnętrzny punkt odbicia,  $r=R_t$ , jest wyznaczony przez  $\omega \approx \omega_c$

**mody g** ( $\omega < \mathbf{N}$ ) - w ogólności  $\omega^2 \ll \mathbf{S}_\ell^2$

$$k_r^2 \simeq \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)$$

**Zachowanie modów g jest całkowicie kontrolowane przez częstotliwość wporu.**

**Punkty odbicia znajdują się w miejscach gdzie  $\omega \approx \mathbf{N}$ .**

# ASYMPTOTYCZNE RELACJE DYSPERSYJNE

Z równania

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = -K(r)\Psi$$

możemy otrzymać przybliżone wyrażenie  
na częstotliwości własne

## ASYMPTOTYCZNE RELACJE DYSPERSYJNE

Z analizy JWKB pokazuje się, że mody oscylacji, zarówno p jak i g, spełniają relację

$$\int_{r_1}^{r_2} K(r)^{1/2} dr = (n - \frac{1}{2})\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$



$$\omega \int_{r_1}^{r_2} \left[ 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \right]^{1/2} \frac{dr}{c} \simeq \pi(n - 1/2)$$

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  są kolejnymi zerami  $K(r)$  i  $K(r) > 0$  między nimi.



**Analiza JWKB bada zachowanie fal blisko punktów odbicia.**

**Zał. rozwiązanie zmienia się szybko w porównaniu z  $K(r)$**

**Równanie na poprzednim slajdzie wyznacza bezpośrednio częstotliwość modów złapanych pomiędzy punktami  $r_1$  i  $r_2$**

## mody p

Dla wysokich częstotliwości możemy założyć  $|N^2/\omega^2| \ll 1$ .  
Ponadto  $\omega_c/\omega \ll 1$  poza górnym punktem odbicia.

$$\omega \int_{r_t}^R \left[ 1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right]^{1/2} \frac{dr}{c} \simeq \pi [n + \alpha(\omega)]$$

## Prawo Duvall'a (1982)

$$\frac{\pi[n + \alpha(\omega)]}{\omega} \approx \int_{r_t}^R \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{c}$$

Jeden z najważniejszych wyników teorii asymptotycznej, wykryte na podstawie analizy częstotliwości słonecznych.

Dla modów o niskich stopniach harmonika sferycznego,  $\ell$ ,

$$\int_{r_t}^R \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{c} \approx \int_0^R \frac{dr}{c} - \frac{\pi L}{2 \omega}$$

stąd

$$\omega = \frac{(n + L/2 + \alpha)\pi}{\int_0^R \frac{dr}{c}}$$

Dla modów o niskich  $\ell$ ,  $L$  zastępujemy przez  $\ell + 1/2$

$$\nu_{nl} \equiv \frac{\omega_{nl}}{2\pi} \simeq \left( n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha \right) \Delta\nu$$

gdzie

$$\Delta\nu = \left[ 2 \int_0^R \frac{dr}{c} \right]^{-1}$$

duże odstępny

częstotliwości modów p są **równoodstępne**

$$\Delta v \approx v_{n+1,l} - v_{n,l} - \text{duże odstępy}$$

Ponadto mody o takich samych wartościach  $n+\ell/2$  spełniają

$$v_{n,l} \approx v_{n-1,l+2}$$

$$\delta v_{n,l} \approx v_{n,l} - v_{n-1,l+2} - \text{małe odstępy}$$

Te dwie cechy obserwujemy w widmie oscylacji Słońca. Odchylenia od tych równości mają bardzo duże znaczenie diagnostyczne.

z analizy JWKB równań oscylacyjnych pokazuje się, że

$$\nu_{nl} - \nu_{n-1, l+2} \simeq -(4l + 6) \frac{\Delta\nu}{4\pi^2 \nu_{nl}} \int_0^R \frac{dc}{dr} \frac{dr}{r}$$

Wielkość ta daje informację o strukturze jądra.

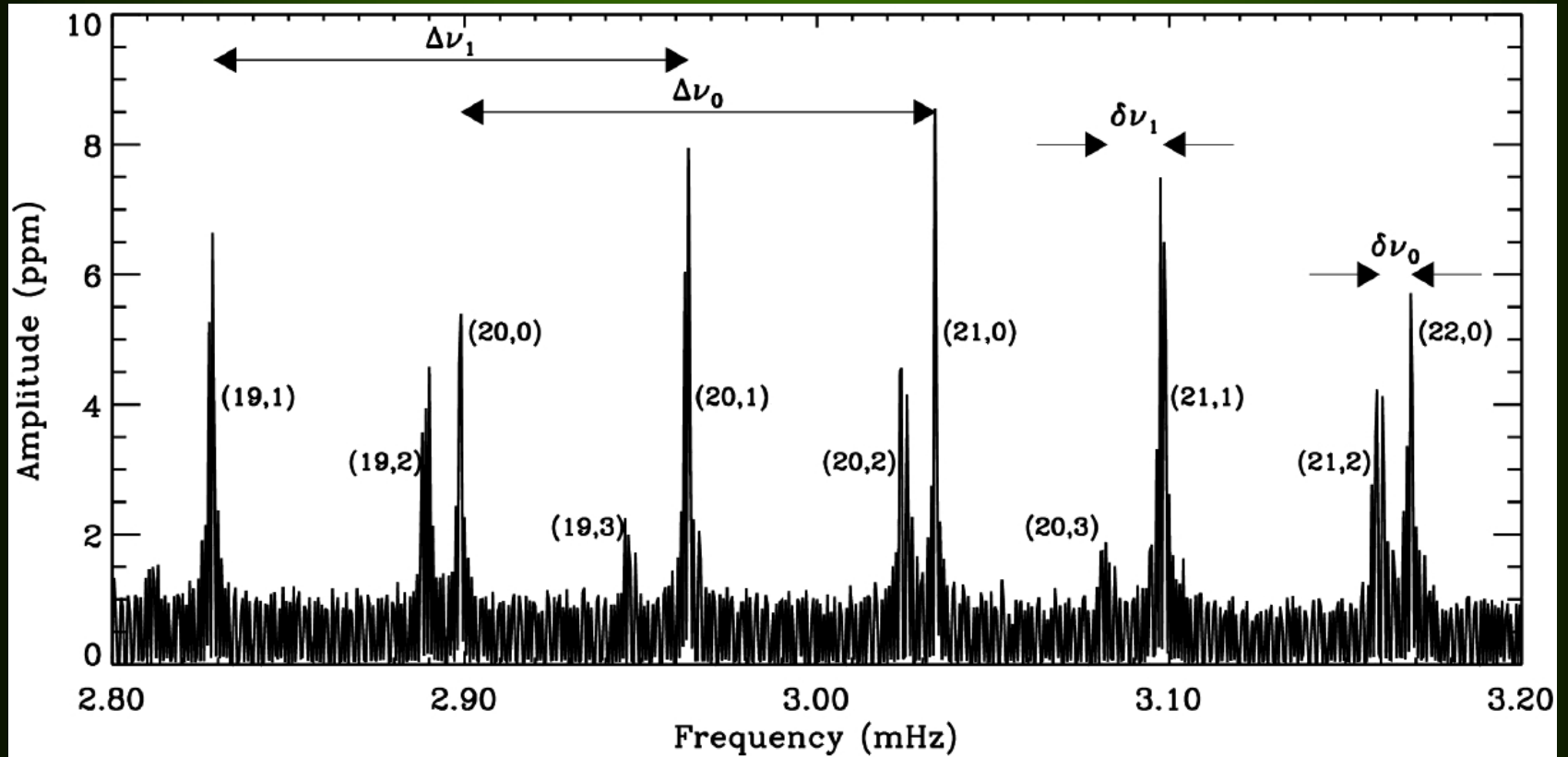
$\delta\nu_{n,l}$  maleje, gdy gwiazda ewoluuje



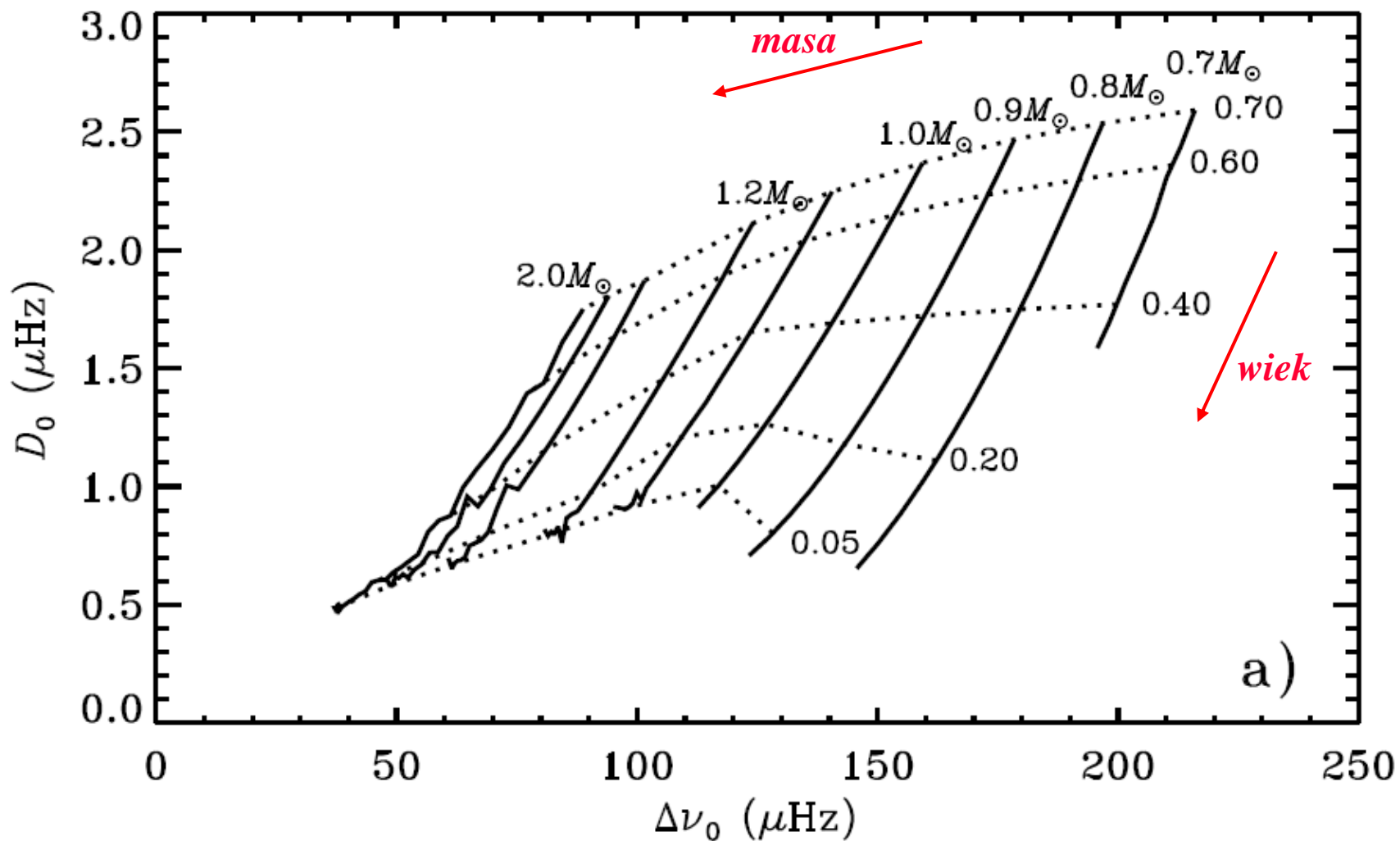
$\Delta v$  - informacja o masie gwiazdy

$\delta v$  - miara wieku gwiazdy

# Fragment widma oscylacji Słońca otrzymany z danych VIRGO (SOHO)



# Diagram asterosejsmiczny



$$\langle \delta\nu_{nl} \rangle_n \cong (4\ell + 6)D_0$$

## mody g

Asymptotyczne zależności znajdujemy przyjmując  $\omega^2 \ll S_\ell^2$

Zakładamy, że  $N$  ma pojedyncze maksimum, czyli dla danej częstotliwości dwa punkty odbicia są jednoznacznie określone.

$$L \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{dr}{r} = (n - 1/2)\pi$$



$$\omega < N_{\max}$$

dla danego  $n$ ,  $\omega \rightarrow N_{\max}$  gdy  $\ell \rightarrow \infty$

Dla modów g o wysokich  $n$  i niskich  $l$ ,  $\omega^2 \ll N^2$ ,  
prawie w całym przedziale  $[r_1, r_2]$ . Można pokazać, że

$$\omega \simeq \frac{L \int_{r_1}^{r_2} N \frac{dr}{r}}{\pi(n + l/2 + \alpha_g)}$$

M. Tassoul 1980

Wprowadzając  $\Pi = 2\pi/\omega$ , napiszemy

$$\Pi \simeq \frac{\Pi_0}{L} \left( n + \frac{l}{2} + \alpha_g \right)$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{2\pi^2}{\int_{r_1}^{r_2} N \frac{dr}{r}} .$$

okresy takich modów o danym  $\ell$  są **równoodstępne**

$$\Pi_n - \Pi_{n-1} = \Pi_0 / L$$

**zastosowanie dla białych karłów – miara masy**

## mody f

$$\rho = \text{const}, \rho' = 0$$
$$\text{div } \xi = 0 \Rightarrow \delta\rho = 0 \Rightarrow \delta p = 0$$

$$\xi_r \propto \exp(k_h r)$$

$\omega^2 \approx g_s k_h$  - powierzchniowe fale grawitacyjne

$$k_h = [\ell(\ell+1)]^{1/2}/R \Rightarrow \omega^2 \approx L(GM/R^3)$$

czyli częstotliwości takich fal skalują się jak  $\omega_{\text{dyn}}$   
dlatego zależą tylko od średniej gęstości gwiazdy

# © BIAŁY KARZEŁ

model białego karła uwzględniający stratyfikację chemiczną

