

# PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2017/2018

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

# OPIS ZABURZEŃ

Dany układ możemy opisać na dwa sposoby:

1. podając jego stan w danym punkcie przestrzeni,
2. opisując zachowanie się danego elementu masy.

Są to odpowiednio opisy **Eulera** i **Lagrange'a** .

Opisom tym odpowiadają różne pochodne czasowe:

$\partial / \partial t$  – pochodna **Eulera**, widziana przez stacjonarnego obserwatora

$d / dt$  – pochodna **Lagrange'a** (Stoksa, materiałowa), śledzimy ruch

Zachodzi między nimi następujący związek:

$$d/dt = \partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

gdzie  $\mathbf{v} = dr/dt$

Zaburzenie **Eulera** - zaburzenie w ustalonym miejscu

$$f'(r,t) = f(r,t) - f_0(r)$$

Zaburzenie **Lagrange'a** - zaburzenie w danym elemencie

$$\delta f(r_0,t) = f(r,t) - f_0(r_0)$$

## Związek między zmiennymi Eulera i Lagrange'a

$$\delta f = f' + [ f_0(\mathbf{r}) - f_0(\mathbf{r}_0) ]$$



$$\delta f = f' + \xi \cdot \nabla f_0(\mathbf{r})$$

gdzie  $\xi \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

## podstawowe zasady komutacji:

1.  $\hat{p}$  komutuje z  $\partial/\partial t$  oraz  $\nabla$
2.  $\delta$  komutuje z  $d/dt$

Związek między prędkością  $v$ , a przesunięciem  $\xi$   
w przypadku opisu **Lagrange'a** i **Eulera**

Jeśli stan niezaburzony jest statyczny ( $v_0=0$ ), to otrzymamy

$$\delta v = v' = \partial \xi / \partial t = d\xi / dt$$

samą prędkość przepływu traktujemy jako wielkość I-go rzędu

**Dowolne przesunięcie elementu masy**

$$\xi = \sum_{nlm} \xi_{nlm}$$

**W teorii liniowej zakładamy, że mody nie oddziałują ze sobą i każdy mod możemy badać osobno.**

**Analiza modów normalnych.**



**Przesunięcie elementu masy dla pojedynczego modu  
w układzie współrotującym (przybliżenie zerowej rotacji !)**

$$\xi_{nlm} = \mathbf{r} [ y_{nlm}(\mathbf{r}) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + z_{nlm}(\mathbf{r}) \nabla_H Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) ] \exp(-i\omega_{nlm} t)$$

**n odpowiada liczbie węzłów spełniających równanie**

$$y_{nlm}(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i=1,2,\dots, n \quad \text{dla } \mathbf{r} \neq 0$$

## Składowe przesunięcia **Lagrange'a**

$$\xi_r = \delta r$$

$$\xi_\theta = r\delta\theta$$

$$\xi_\varphi = r \sin\theta\delta\varphi$$

## W układzie współrotującym

$$\delta r''(r'', \theta'', \phi'', t) = r'' y_{nlm}(r'') Y_\ell^m(\theta'', \phi'') \exp(i\omega_{nlm} t),$$

$$\delta \theta''(r'', \theta'', \phi'', t) = z_{nlm}(r'') \frac{\partial}{\partial \theta''} Y_\ell^m(\theta'', \phi'') \exp(i\omega_{nlm} t),$$

$$\delta \phi''(r'', \theta'', \phi'', t) = \frac{z_{nlm}(r'')}{\sin^2 \theta''} \frac{\partial}{\partial \phi''} Y_\ell^m(\theta'', \phi'') \exp(i\omega_{nlm} t),$$

## W układzie nieruchomym

$$\delta r'(r', \theta', \phi', t) = r' y_{nlm}(r') Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(i\omega_{nlm} t),$$

$$\delta \theta'(r', \theta', \phi', t) = z_{nlm}(r') \frac{\partial}{\partial \theta'} Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(i\omega_{nlm} t),$$

$$\delta \phi'(r', \theta', \phi', t) = \frac{z_{nlm}(r')}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'} Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(i\omega_{nlm} t).$$

## W układzie obserwatora

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\delta\theta' + \frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\delta\phi',$$

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\delta\theta' + \frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\delta\phi',$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta'} = \frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi'} = \frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\sin\theta' = N(\theta, \phi)\sin\theta.$$

## W układzie obserwatora

$$\delta r(r, \theta, \phi, t) = r y_{nlm}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(i(\omega_{nlm} - m\Omega)t),$$

$$\delta\theta(r, \theta, \phi, t) = z_{nlm}(r) \left[ \left( \frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(i(\omega_{nlm} - m\Omega)t)$$

$$+ \frac{z_{nlm}(r)}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left[ \left( \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(i(\omega_{nlm} - m\Omega)t),$$

$$\delta\phi(r, \theta, \phi, t) = z_{nlm}(r) \left[ \frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \frac{\partial}{\partial\theta} + \left( \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(i(\omega_{nlm} - m\Omega)t)$$

$$+ \frac{z_{nlm}(r)}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left[ \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} \frac{\partial}{\partial\theta} + \left( \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(i(\omega_{nlm} - m\Omega)t).$$

**Ponieważ grupa obrotów wokół kątów Eulera jest ortonormalna zachodzą następujące relacje:**

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} + \frac{1}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} = 0.$$

## W układzie obserwatora

$$\delta r(r, \theta, \phi, t) = r y_{n\ell m}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(i(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t),$$

$$\delta \theta(r, \theta, \phi, t) = z_{n\ell m}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) \frac{\partial Y_{\ell}^k(\theta, \phi)}{\partial \theta} \exp(i(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t),$$

$$\delta \phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{z_{n\ell m}(r)}{\sin^2 \theta} \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) \frac{\partial Y_{\ell}^k(\theta, \phi)}{\partial \phi} \exp(i(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t).$$



W przypadku radialnych pulsacji adiabatycznych zlinearyzowane równania możemy zapisać jako  $L_{ad}[\xi]=\omega^2\xi$ , co wraz z warunkami brzegowymi stanowi zagadnienie typu **Sturma-Liouville'a**.

**L** - operator liniowy, w którym funkcje skalarne, występujące jako współczynniki, są niezależne od  $t$ ,  $\theta$  i  $\varphi$ .

Czasami zapisujemy  $L_{ad}[\xi]=0$

**W zagadnieniu typu **S-L** spełnione są twierdzenia:**

- 1. Istnieje nieskończona liczba wartości własnych  $\omega_n^2$ .**
- 2.  $\omega_n^2$  są rzeczywiste i można je uporządkować następująco:  
 $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \dots$ , gdzie  $\omega_n^2 \rightarrow \infty$  dla  $n \rightarrow \infty$ .**
- 3. Funkcja własna  $y_0$  związana z najniższą częstotliwością,  $\omega_0^2$ , nie posiada węzłów w przedziale  $0 < r < R$  (mod fundamentalny). Dla  $n > 0$  funkcja własna  $y_n$  ma  $n$  węzłów (n-ty overtone).**
- 4. Znormalizowane funkcje własne  $y_n$  tworzą układ zupełny i spełniają relacje ortonormalności.**

W przypadku pulsacji nieradialnych nie mamy już zagadnienia typu **Sturma-Liouville**.

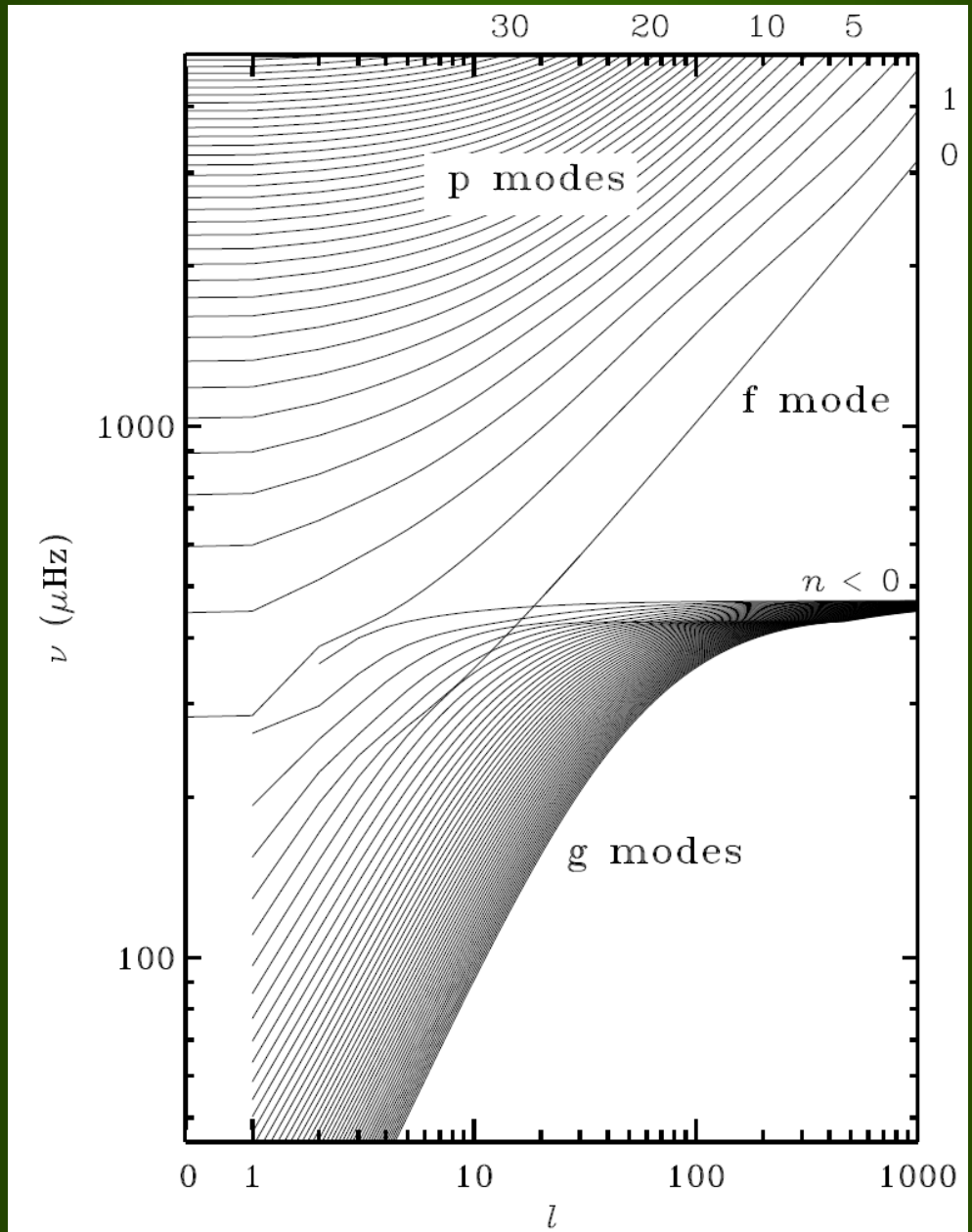
Równanie  $L[\xi_r]=0$  staje się biliniowe w  $\omega_n^2$  i  $\omega_n^{-2}$  i w granicach  $\omega_n^2 \rightarrow \infty$  lub  $\omega_n^2 \rightarrow 0$  dąży do równanie typu **S-L**.

**W przypadku modów nieradialnych  
mamy dwa rozwiązania:**

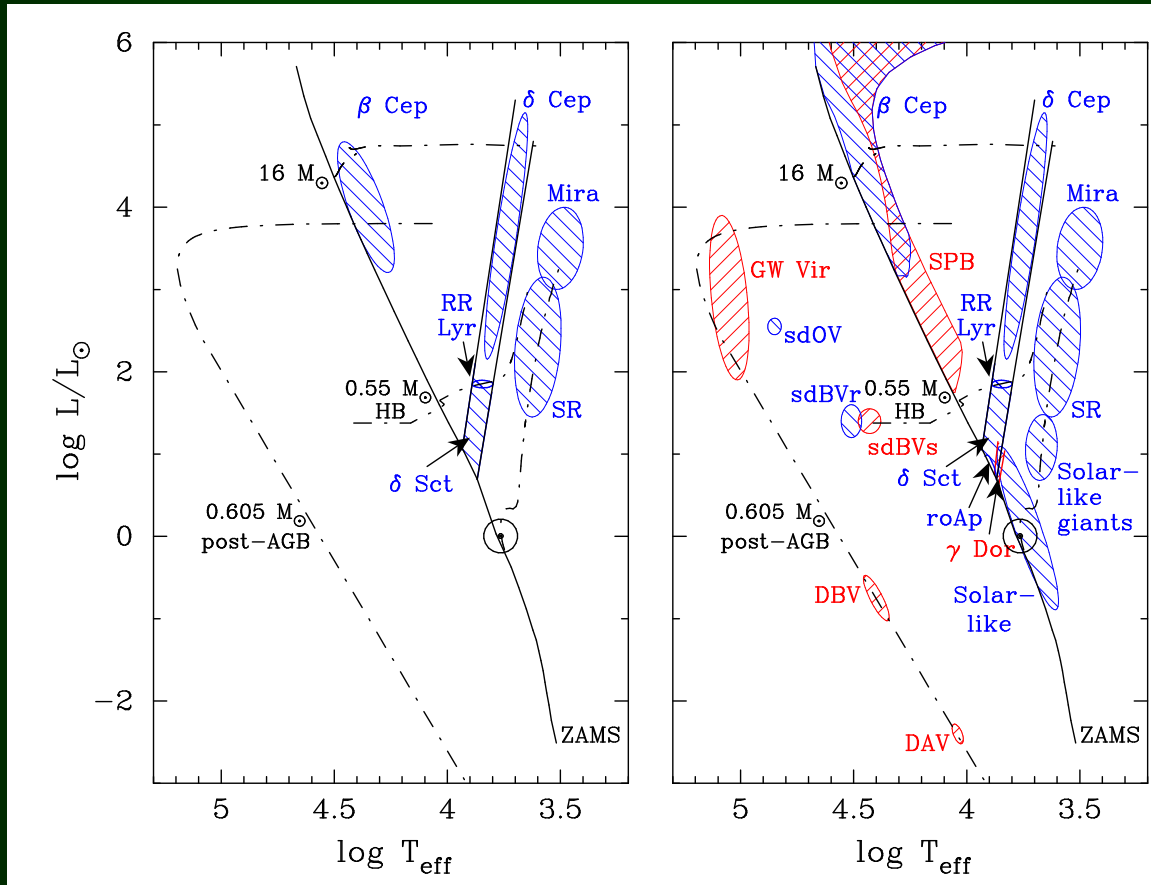
$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \omega_3^2 < \dots \quad \text{mody ciśnieniowe}$$

$$0 < 1/\omega_1^2 < 1/\omega_2^2 < 1/\omega_3^2 < \dots \quad \text{mody grawitacyjne}$$

# $\nu$ vs. $\ell$ dla modelu Słońca



# Obszary niestabilności pulsacyjnej na diagramie Hertzsprunga-Russella

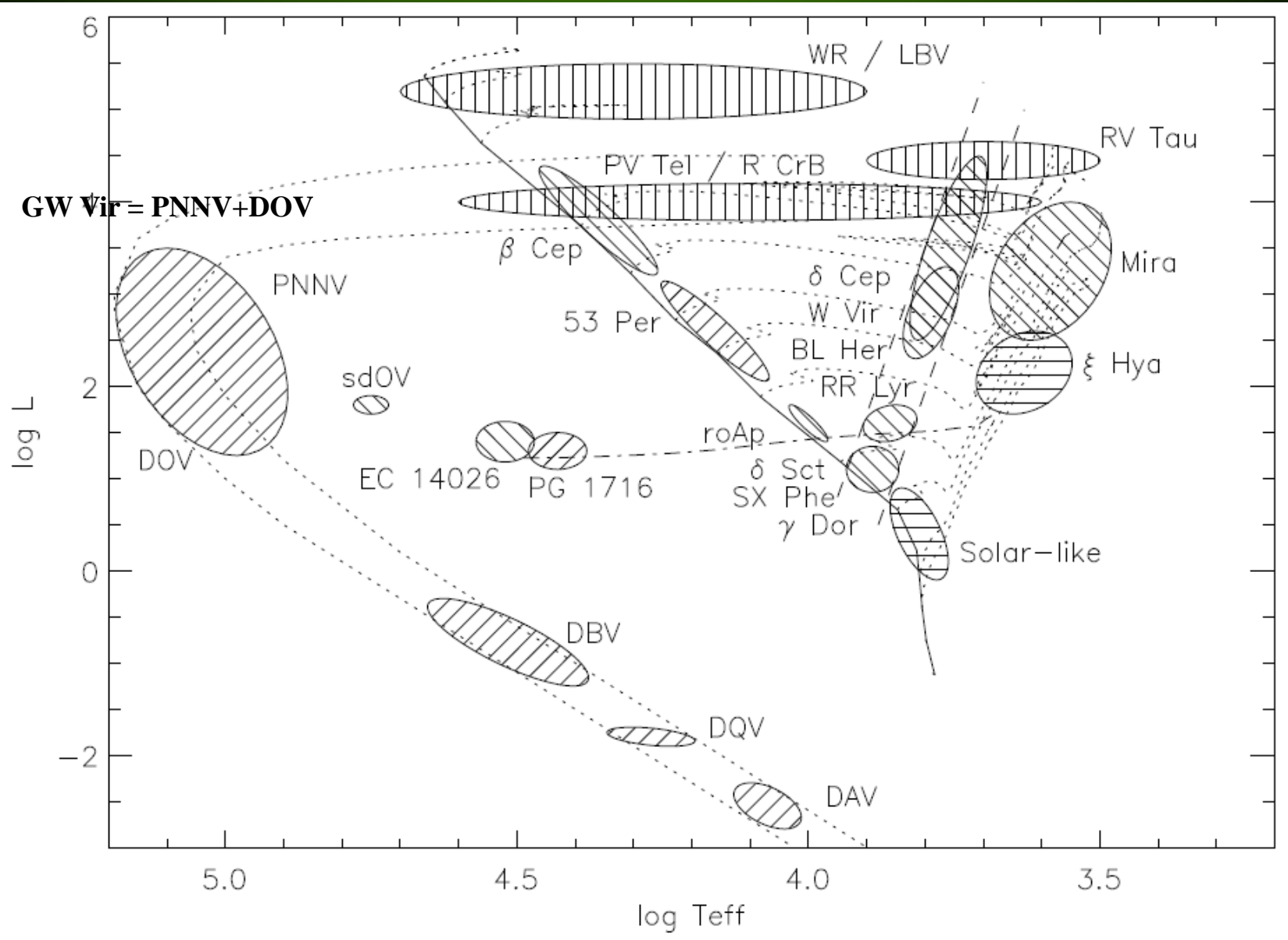


Okolo 45 lat temu

Obecnie

| Name                                | Approx. Periods | Discovery/ Definition          |
|-------------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| Mira variables                      | 100 - 1000 d    | Fabricius (1596)               |
| Semiregular (SR) variables          | 20 - 2000 d     | Herschel (1782)                |
| $\delta$ Cephei stars               | 1 - 100 d       | 1784, Pigott, Goodricke (1786) |
| RR Lyrae stars                      | 0.3 - 3 d       | Fleming (1899)                 |
| $\delta$ Scuti stars                | 0.3 - 6 h       | Campbell & Wright (1900)       |
| $\beta$ Cephei stars                | 2 - 7 h         | Frost (1902)                   |
| ZZ Ceti stars (DAV)                 | 2 - 20 min      | 1964, Landolt (1968)           |
| GW Virginis stars (DOV)             | 5 - 25 min      | McGraw et al. (1979)           |
| Rapidly oscillating Ap (roAp) stars | 5 - 25 min      | 1978, Kurtz (1982)             |
| V777 Herculis stars (DBV)           | 5 - 20 min      | Winget et al. (1982)           |
| Slowly Pulsating B (SPB) stars      | 0.5 - 3 d       | Waelkens & Rufener (1985)      |
| Solar-like oscillators              | 3 - 15 min      | Kjeldsen et al. (1995)         |
| V361 Hydrae stars (sdBVr)           | 2 - 10 min      | 1994, Kilkenny et al. (1997)   |
| $\gamma$ Doradus stars              | 0.3 - 1.5 d     | 1995, Kaye et al. (1999)       |
| Solar-like giant oscillators        | 1 - 18 hr       | Frandsen et al. (2002)         |
| V1093 Herculis stars (sdBVs)        | 1 - 2 hr        | Green et al. (2003)            |
| Pulsating subdwarf O star (sdOV)    | 1 - 2 min       | Woudt et al. (2006)            |

# BARDZIEJ KOMPLETNY OBRAZ ...





## TYPY GWIAZD PULSUJĄCYCH

| TYP              | M/M <sub>☉</sub> | logT <sub>eff</sub> | P          | Mody           |
|------------------|------------------|---------------------|------------|----------------|
| Cepheids         | 4-14             | 3.7-3.9             | 1-80 d     | rad, nierad?   |
| RR Lyr           | 0.5-0.7          | 3.8-3.9             | 0.1-1.2 d  | rad, nierad?   |
| Miry             | 2-3?             | 3.3-3.5             | 80-1500 d  | radialne       |
| δ Sct, SX Phe    | 1.5-2.8          | 3.8-3.9             | 0.01-0.3 d | p, g, niskie n |
| γ Dor            | ~1.5             | 3.8-3.85            | 0.3-1.5 d  | g, n>>1        |
| roAp             | 1.8-2            | ~3.9                | 6-15 min   | p, n>>1        |
| SPB              | 3-7              | 4.1-4.3             | 0.5-4 d    | g, n>>1        |
| β Cep            | 8-16             | 4.35-4.5            | 0.07-0.3 d | p, g           |
| solar type       | ~1               | 3.7-3.8             | 5-16 min   | p, n>>1        |
| ZZ Cet (DAV)     | 0.4-0.8          | 4.05-4.1            | 1-15 min   | g              |
| V777 Her (DBV)   | ~0.6             | 4.33-4.4            | 1-15 min   | g, n>>1        |
| GW Vir(DOV+PNNV) | 0.6              | 4.8-5.2             | 5-33 min   | g, n>>1        |
| V361 Hya (sdB)   | <0.5             | 4.45-4.6            | 80-600 s   | p, low n       |
| V1093 Her (sdB)  | <0.5             | 4.4-4.48            | 45min- 2h  | g, n>>1        |
| sdOv             | 0.5              | 4.6 – 5.0           | 60-160 s   | g, n>>1        |

Hybrid pulsators, np. β Cep/SPB, δ Sct/γ Dor, V361 Hya/V1093 Her

# **GENERAL CATALOGUE OF VARIABLE STARS**

**<http://www.sai.msu.su/gcvs/index.htm>**

**Przykładowe oznaczenia typów:**

**ACYG, BCEP, DCEP, DSCT, M,**

**RR, RRAB, RV, SR, SXPHE, ZZ**

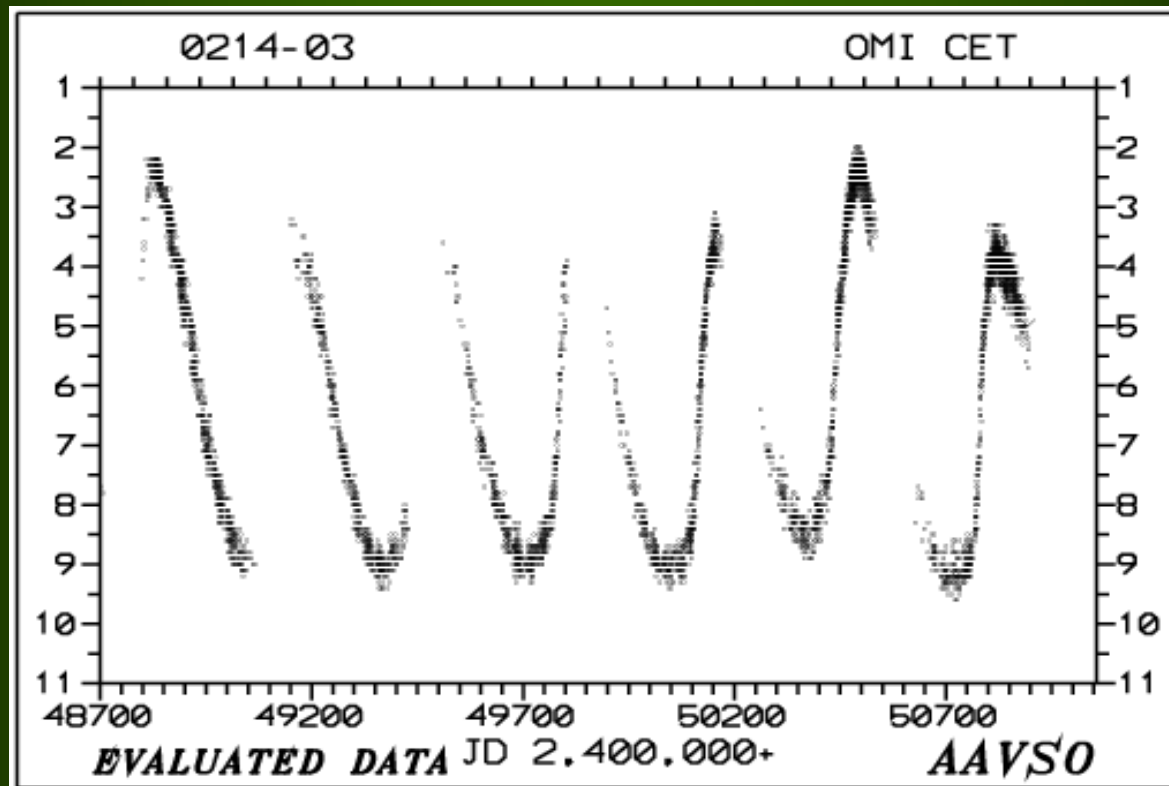
**Nazewnictwo gwiazd zmiennych – Friedrich Argelander**

## Przykładowe krzywe blasku

**Mira** (o Cet) - pierwsza gwiazda pulsująca odkryta w 1596 przez Davida Fabriciusa.

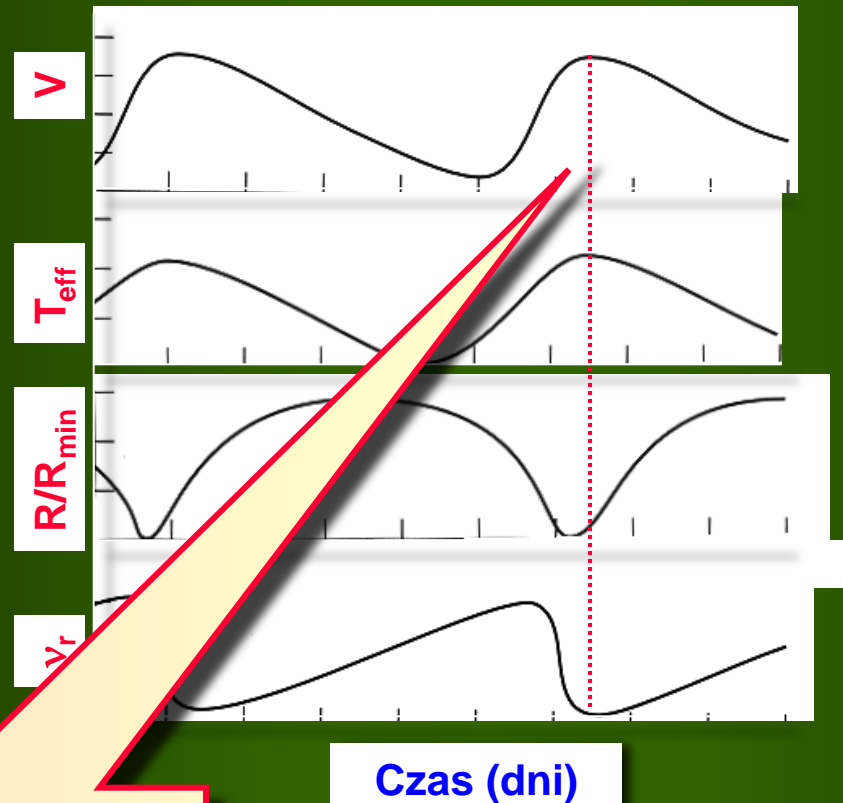


Mira zmienia jasność obserwowaną od +3.5 do +9 mag z okresem 332 dni.



# Cefeidy klasyczne

$\delta$  Cephei odkryta przez Goodricka w 1784,  $P=5.4$  d

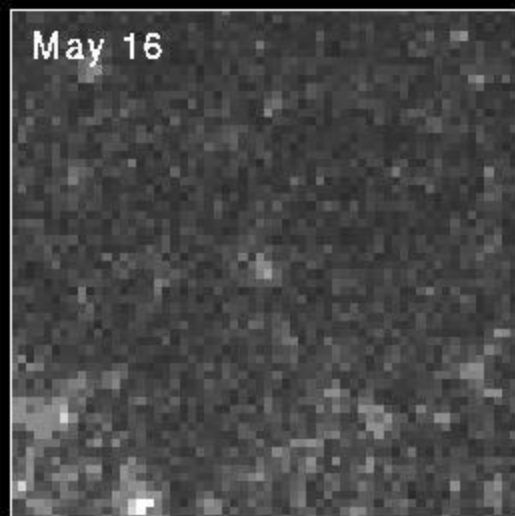
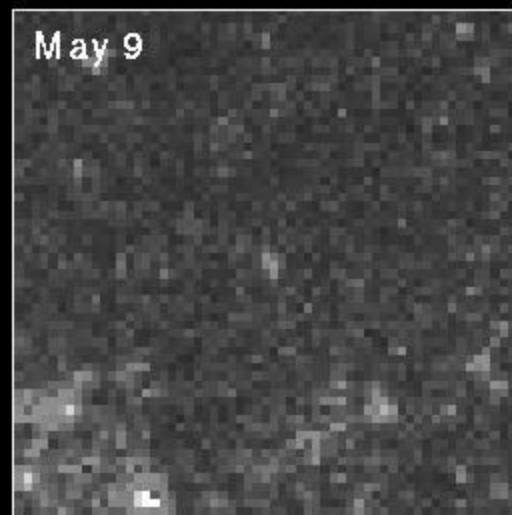
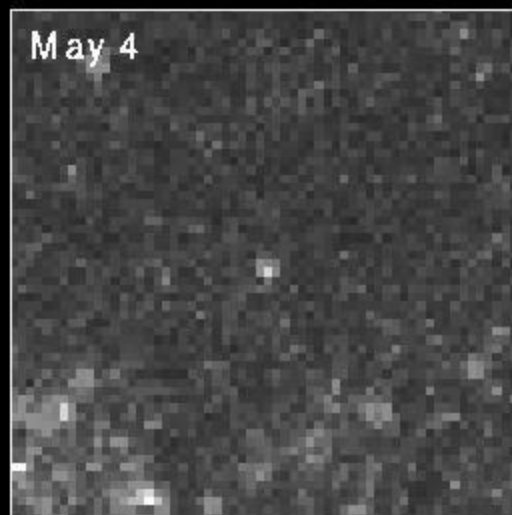


Przesunięcie fazowe między  
maksimum jasności a  
minimum promienia !

0.1-0.2 P

# Cepheid Variable Star in Galaxy M100

HST-WFPC2



# RV Tauri

## obiekty post-AGB (nadolbrzemy) o małych masach

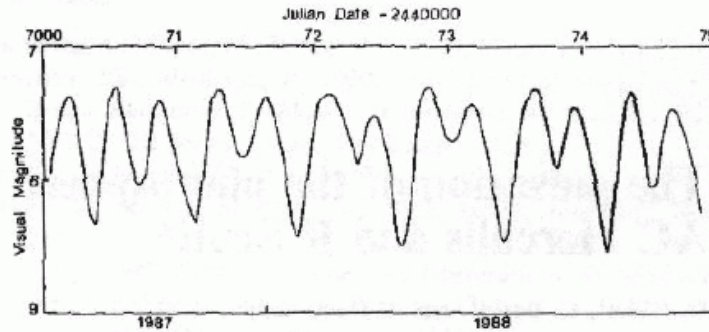


Figure 2.17: The lightcurve of the RV Tauri star AC Her.

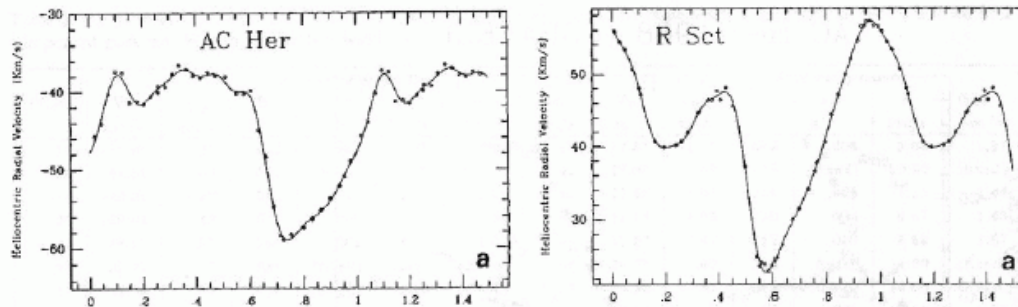


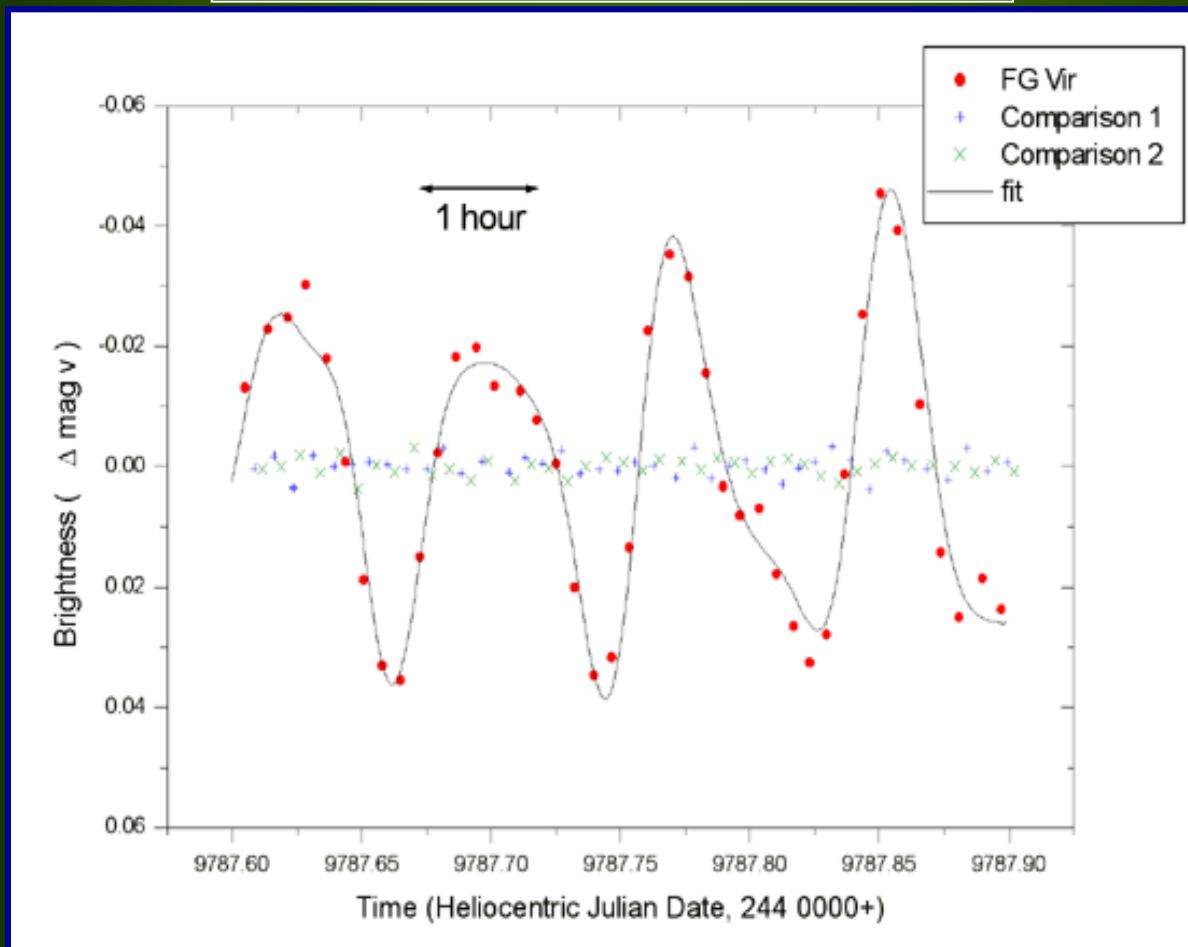
Figure 2.18: The radial-velocity curves of the RV Tauri stars AC Her and R Scuti.

Występowanie na przemian płytszych i głębszych minimów

- RVa - nie wykazują zmian średniej jasności
- RVb - wykazują okresowe zmiany średniej jasności

# $\delta$ Scuti

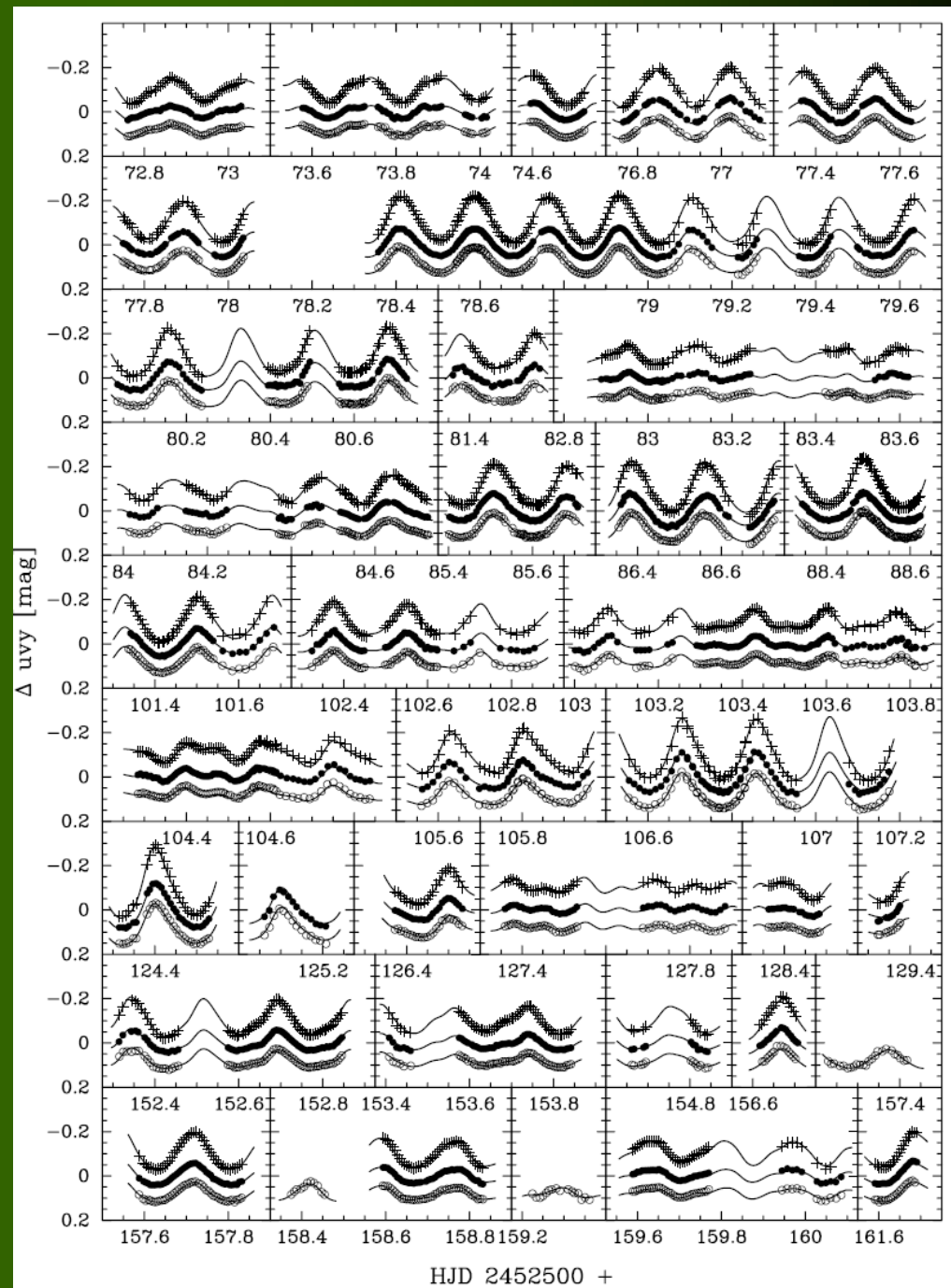
Campbell & Writh 1900  
Fath, Colacevich 1935



$\beta$  Cephei

Frost 1902

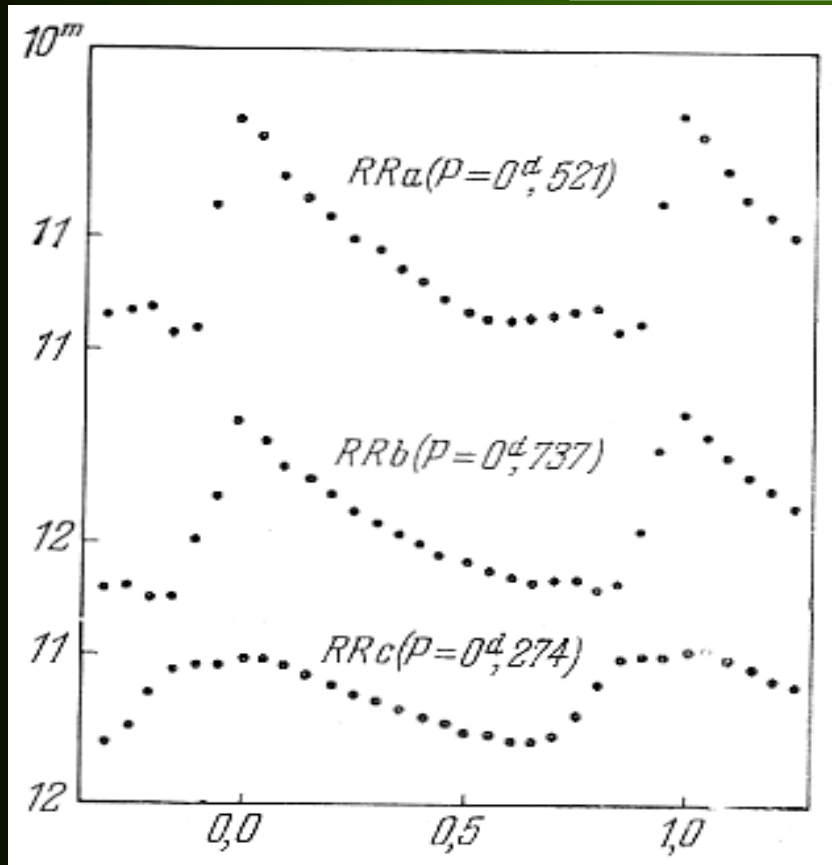
Krzywe blasku v Eridani  
w pasmach Strömgrena uvy



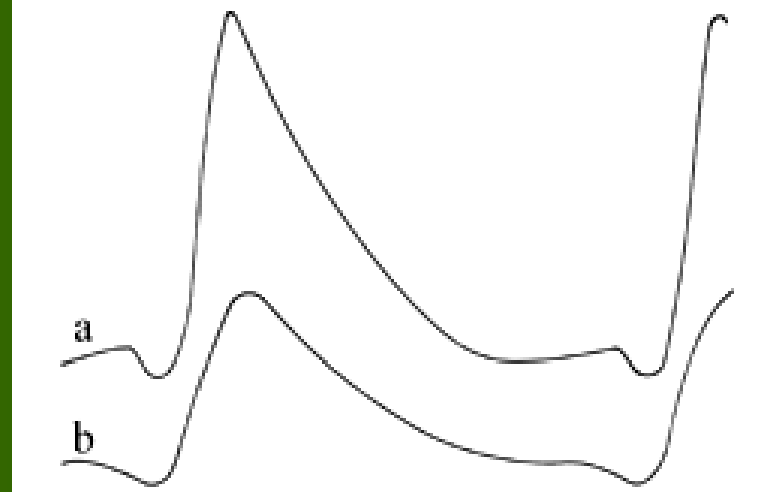


# RR Lyrae

## Fleming 1899



Tvar světelných křivek „a“ a „b“ u hvězd typu RR Lyrae



Tvar světelné křivky „c“ u hvězd typu RR Lyrae



**a,b,c – klasy Baileya**

(podział ze względu na amplitudę, kształt krzywej blasku i okres pulsacji)

a:  $\Delta m_V = 1.3$ , b:  $\Delta m_V = 0.9$ , c:  $\Delta m_V = 0.5$

## RR Lyrae

**RRa i RRb – pulsują w radialnym modzie fundamentalnym i mają asymetryczną krzywą blasku**

**RRc – pulsują w pierwszym owertonie i mają sinusoidalną krzywą blasku**

**RRd – dwumodalne, pulsują jednocześnie w modzie fundamentalnym i pierwszym owertonie**

**RRe (?) – pulsują w drugim owertonie**

**Dane z misji Kepler: wielomodalne gwiazd RR Lyr**

## RR Lyrae

**Inna klasyfikacja dotyczy gromad macierzystych:**

**gromada typu Oosterhoff I - zawiera głównie RRab  
M3, M5**

**gromada typu Oosterhoff II –  $N(\text{Rab}) \approx N(\text{RRc})$   
 $\omega$  Cen, M15**

**Gromady typu Oosterhoff II mają mniej metali**

## RR Lyrae

### Efekt Błażki (1924) - okresowe zmiany amplitudy i fazy krzywej blasku

$P=0.54$  d  
 $P_{\text{mod}}=41$  d

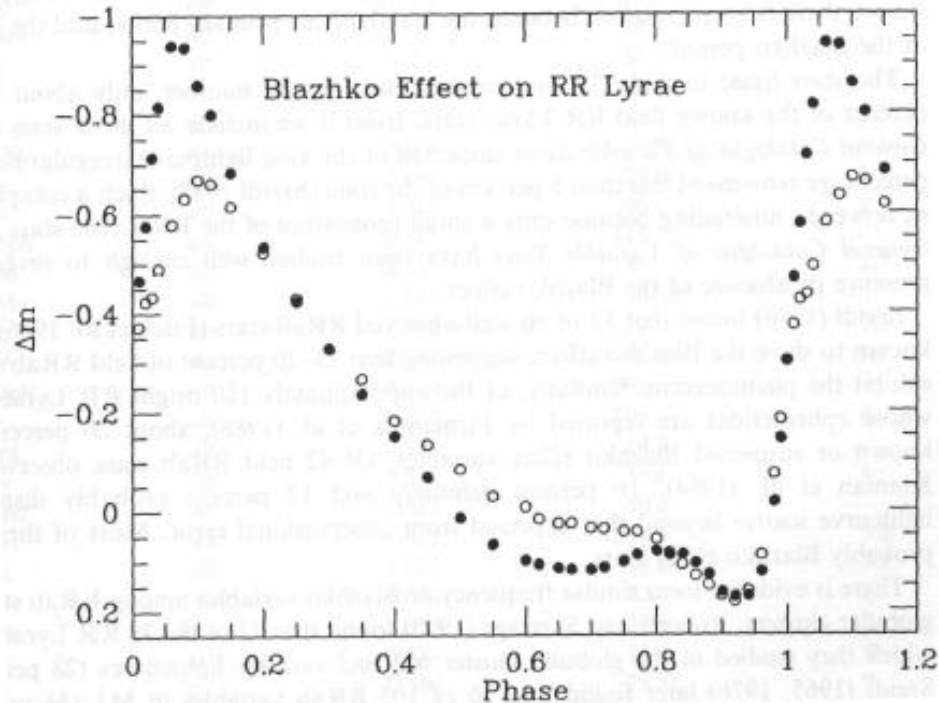
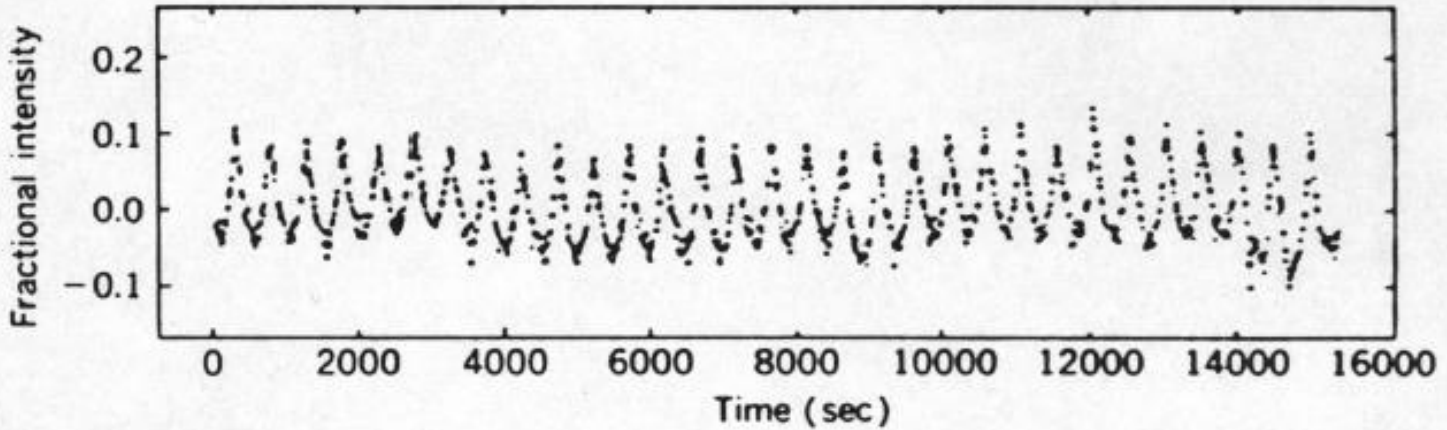
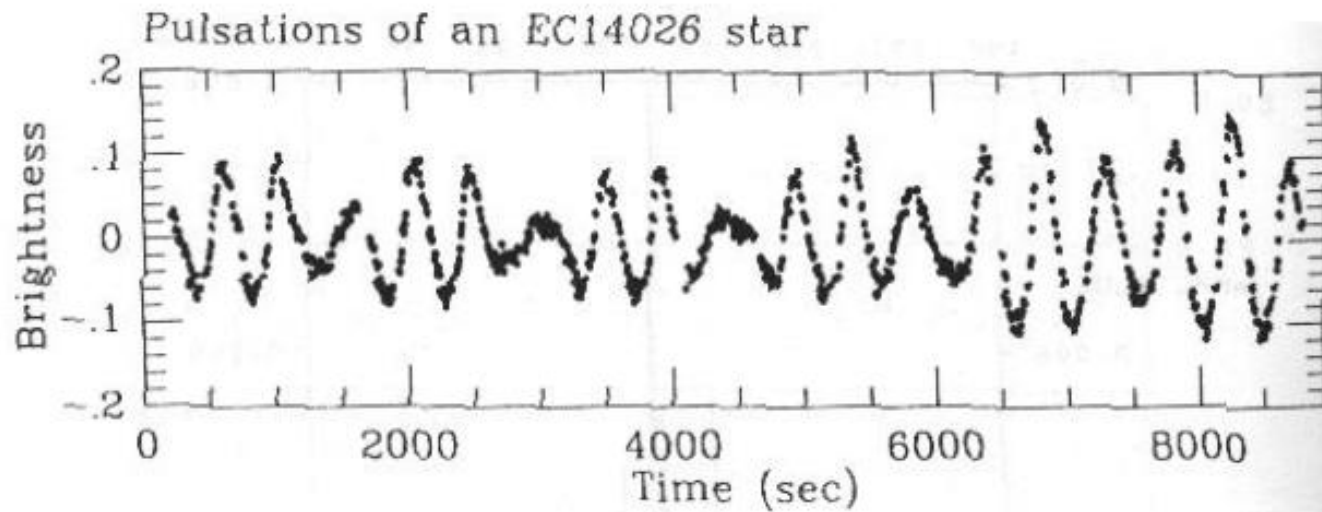


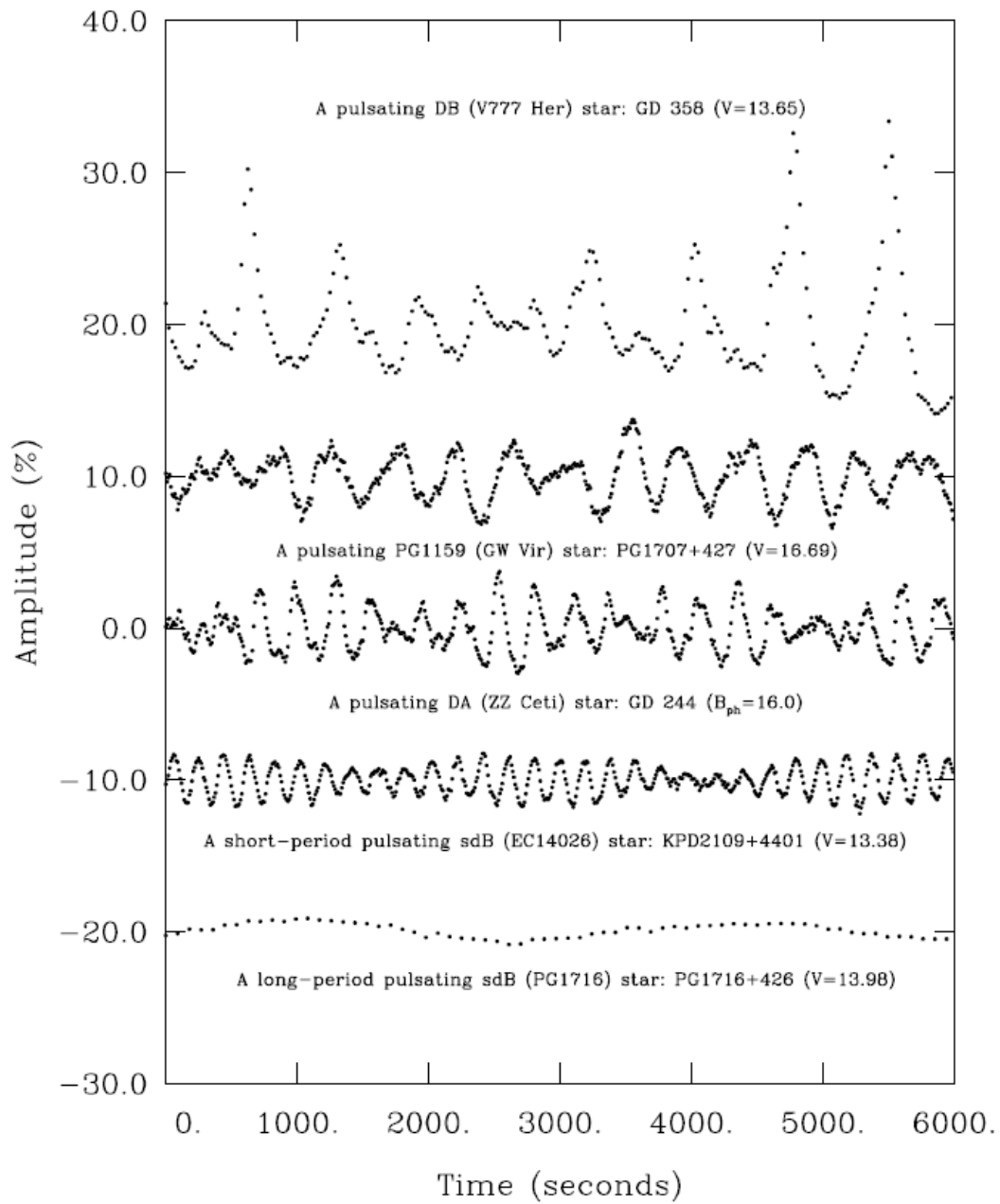
Figure 2.16: The Blazhko effect in RR Lyrae: the amplitude of the light variations is modulated with a period of 40.8 days. The lightcurves presented by open, respectively filled dots were measured some 20 days apart.

**V777 Her (DBV), PG1351+489**



## V361 Hya (sdBv), EC 14026





**Henrietta Swan Leavitt (1868 –1921)**  
Obserwując w 1908 Cefeidy w MC  
odkryła zależność okres-jasność,  
zależność **P-L** (period -luminosity).



$$\log_{10} \left( \frac{\langle L \rangle}{L_{\odot}} \right) = 1.15 \log_{10} \Pi^d + 2.47$$

$$M_{\langle V \rangle} = -2.80 \log_{10} \Pi^d - 1.43$$

+

$$m_V - M_V = 5 \log_{10} r - 5$$

=

odległość



# zależność P-L z 1912

Jasność w max i min blasku

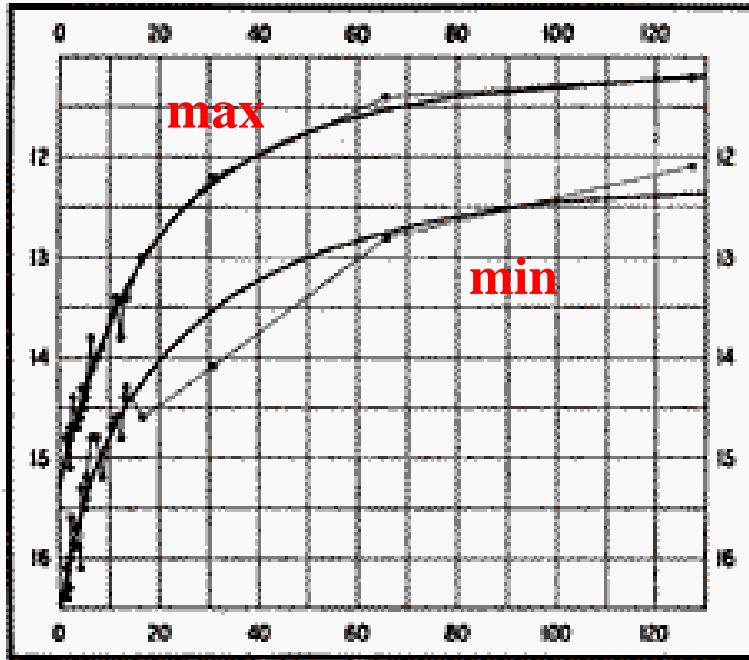


FIG. 1.

P [d]

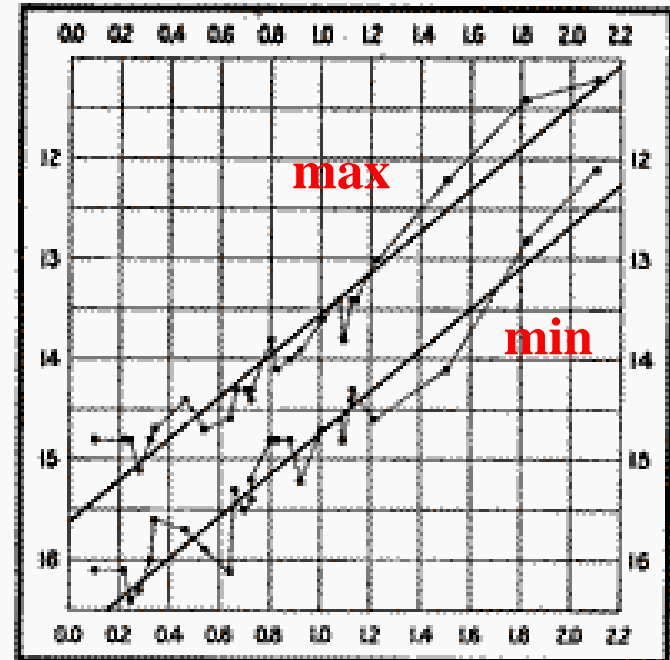
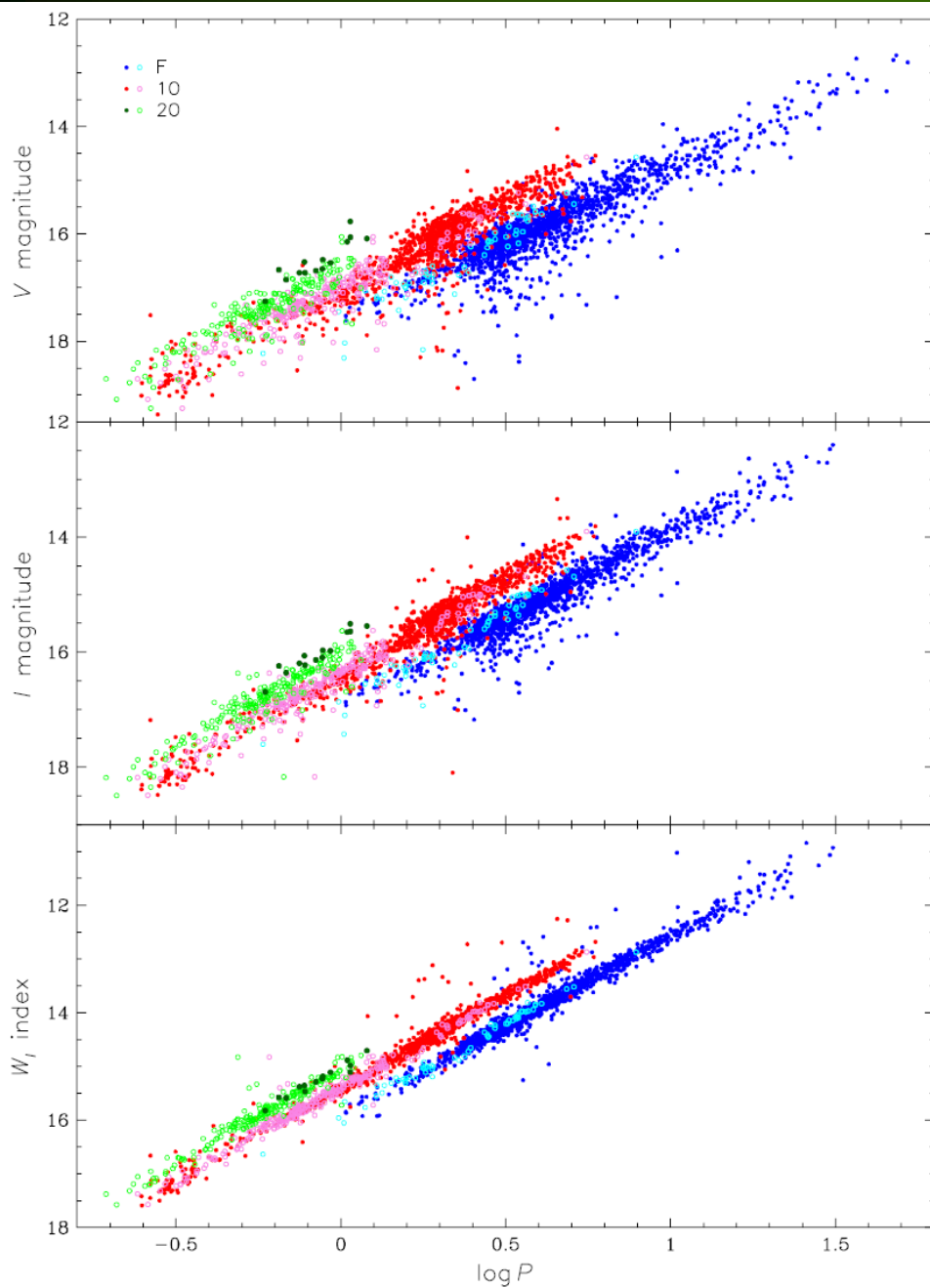


FIG. 2.

Log P



**Diagram okres–jasność dla  
Cefeid klasycznych w LMC**

**Dane OGLE, Soszyński et al. 2008**

**$W_I$  - wskaźnik barwy wolny  
od poczerwienienia**

$$W_I = I - 1.55(V - I)$$

## STAŁA PULSACJI, Q

$$P\sqrt{\rho} = \text{const} = Q$$

1. Wychodzimy od równanie ruchu
2. Zaburzamy
3. Linearyzujemy

**Wynik:**

$$P\sqrt{\rho} = [ 3\pi / G(3\gamma - 4) ]^{1/2} = Q$$

czyli  $P \sim 1 / \sqrt{\rho}$

$\gamma > 4/3$  - gwiazda oscyluje

$\gamma < 4/3$  – gwiazda zapada się

model  $\delta$  Cep:  $M=7 M_{\odot}$ ,  $R=80 R_{\odot}$ ,  $\rho \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ ,  $P=11 \text{ d}$

$$Q = P \sqrt{\rho} = 0.049$$

Nadolbrzomy  $\rho = 5 \cdot 10^{-8} \text{ g/cm}^3 \rightarrow P = 220 \text{ d}$

Białe karły  $\rho = 10^6 \text{ g/cm}^3 \rightarrow P = 4 \text{ s}$

Jeśli stałą pulsacji zdefiniujemy

$$P\sqrt{\rho/\rho_{\odot}} = Q$$

to  $Q$  ma wymiar czasu

Gaz doskonały, jednoatomowy  $\gamma = 5/3$

$$P = 0.12 * (\rho / \rho_{\odot})^{-1/2} \text{ [d]}$$

Częściowo zjonizowane pierwiastki ciężkie  $\gamma = 13/9$

$$P = 0.20 * (\rho / \rho_{\odot})^{-1/2} \text{ [d]}$$

zazwyczaj  $0.03 < Q < 0.08 \text{ [d]}$

Z równości:

$$P\sqrt{\rho/\rho_{\odot}} = Q$$

wynika zależność **okres - jasność - barwa**:

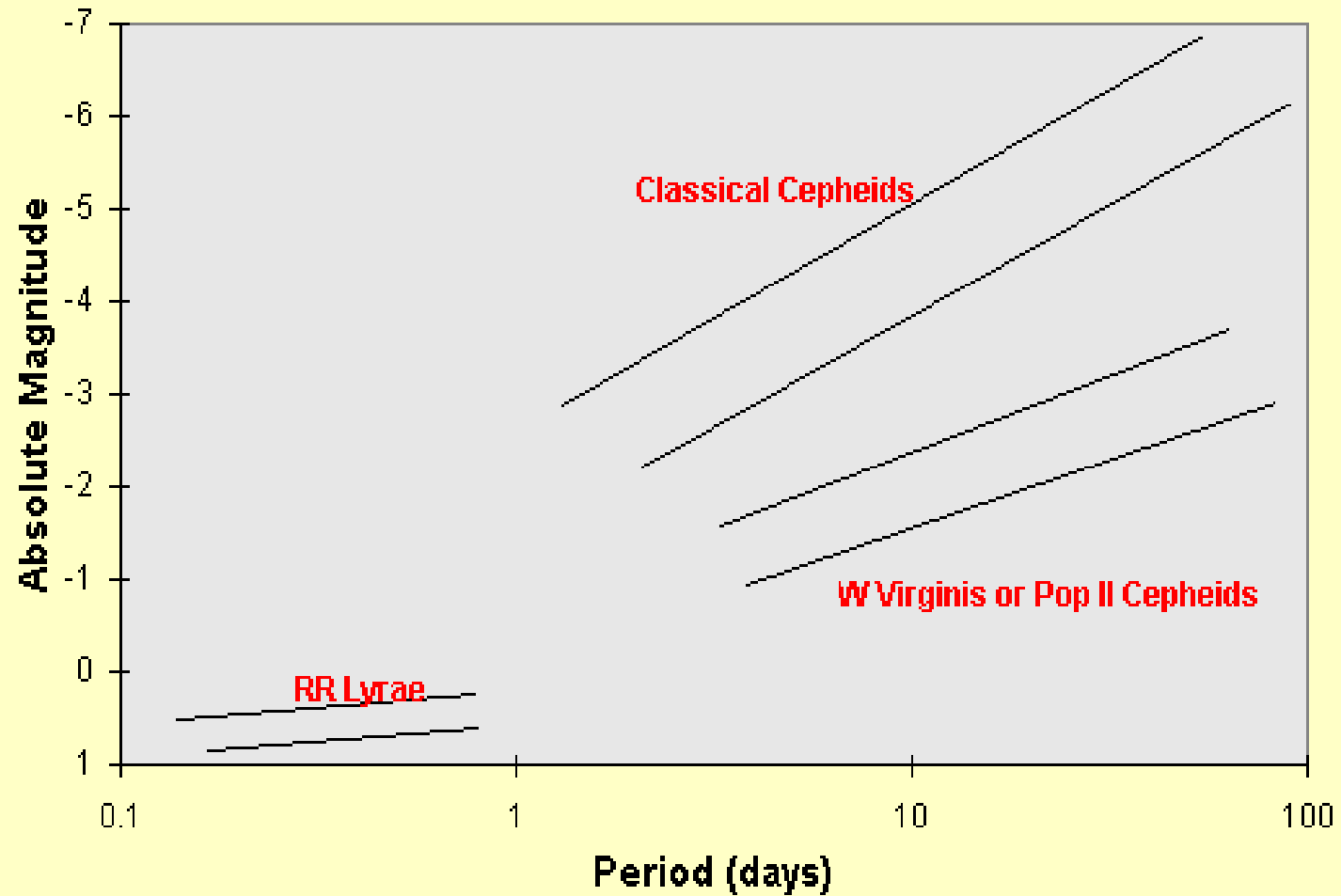
$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol}\odot} = -3.33\log P + 3.33\log Q - 10\log T_{\text{eff}}/T_{\text{eff}\odot} + 5\log g/g_{\odot}$$

lub

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol}\odot} = -3.33\log P + 3.33\log Q - 10\log T_{\text{eff}}/T_{\text{eff}\odot} - 1.67\log M/M_{\odot}$$

Zależność ta ma sens statystyczny i może być wyznaczona dla każdej grupy gwiazd pulsujących o zbliżonych cechach fizycznych.

## Period - Luminosity Relationship





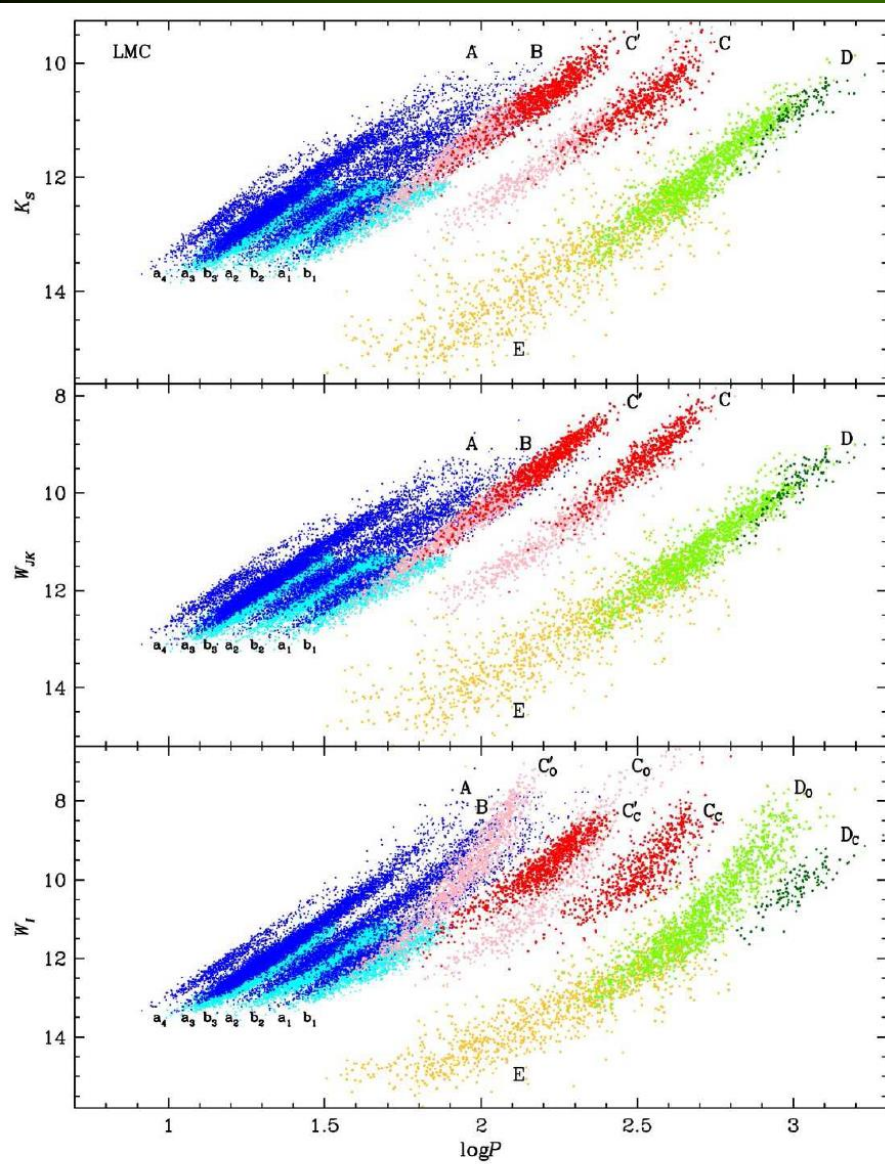


Fig. 1. Period-luminosity diagrams of variable red giants in the LMC. OSARG variables are shown as blue points (RGB as light blue, AGB as dark blue). Miras and SRVs are marked with pink (O-rich) and red (C-rich) points. Light and dark green points refer to O-rich and C-rich LSP variables, respectively. Yellow points indicate ellipsoidal red giants.

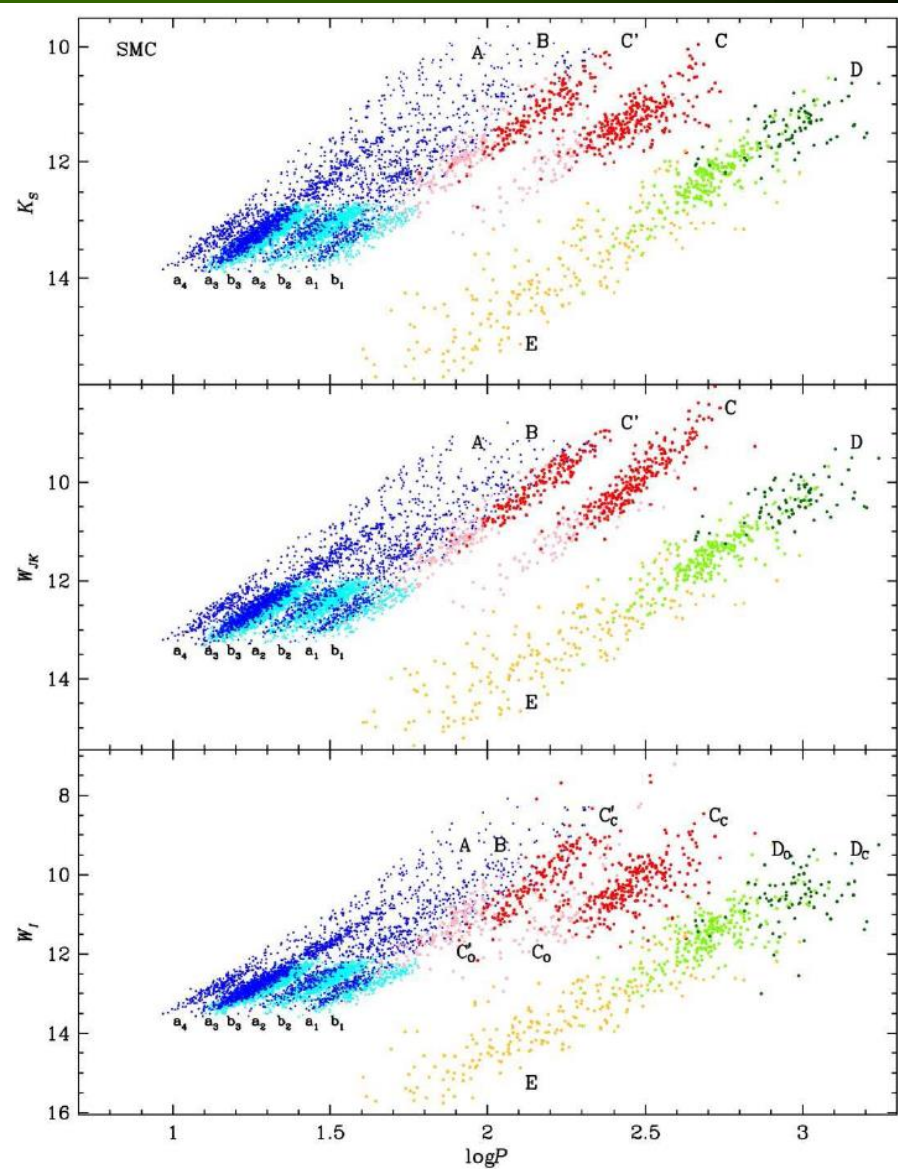


Fig. 3. Period-luminosity diagrams of variable red giants in the SMC. The colors represent the same types of stars as in Fig. 1.