

PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2018/2019

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

LITERATURA:

1. Jørgen Christensen-Dalsgaard, 2003,
Lecture Notes on Stellar Oscillations
2. C. Aerts, Jørgen Christensen-Dalsgaard, D. Kurtz, 2010,
Asteroseismology
3. Wykłady prof. W. Dziembowskiego
4. Unno E., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989,
Nonradial Oscillations of Stars
5. Cox J. P., 1980, *Theory of Stellar Pulsation*
6. Christensen-Dalsgaard & Dziembowski, 2000
Basic aspects of stellar structure and pulsation

RAMOWY PLAN WYKŁADU

- 1. Podstawowe własności oscylacji gwiazdowych.
Wybrane zagadnienia matematyczne.**
- 2. Typy gwiazd pulsujących.**
- 3. Pulsacje adiabatyczne.**
- 4. Pulsacje nieadiabatyczne.**
- 5. Mechanizmy napędzania pulsacji.**
- 6. Efekty rotacji.**

RAMOWY PLAN WYKŁADU

- 7. Pulsacyjne zmiany obserwowanych charakterystyk: zmiany blasku, profili linii widmowych**
- 8. Analiza periodogramowa.**
- 9. Metody identyfikacji modów pulsacji.**
- 10. Helioseismologia**
- 11. Asteroseismologia.**

Gwiazda pulsująca - gwiazda, której zmienność spowodowana jest przez zachodzące w niej pulsacje, czyli przez istnienie fal hydrodynamicznych (akustycznych lub/i wypornościowych)



Zmiany **jasności** lub/i **prędkości radialnej**

Mody oscylacji (pulsacyjne) – drgania odpowiadające różnym możliwym częstotliwościom (okresom)

Dwa ważne wyniki teorii pulsacji:

- występowanie częstości **harmonicznych**
- gwiazdy mogą pulsować **nieradialnie**

pulsacje radialne - gwiazda zmienia swój promień, ale we wszystkich fazach zachowana jest symetria sferyczna

pulsacje nieradialne - gwiazda jest podzielona na sektory drgające w przeciwnych fazach niż sąsiednie i przesuwane się po powierzchni gwiazdy

Dany mod pulsacji jest określony przez $\omega_{n\ell m}$ oraz trzy liczby kwantowe : **n**, **ℓ**, **m**.

$\omega_{n\ell m} = 2\pi\nu_{n\ell m}$ – częstotliwość kołowa

n - radialny rząd modu

ℓ - stopień modu, $\ell=0,1,2, \dots$

m - rząd azymutalny, $|m| \leq \ell$

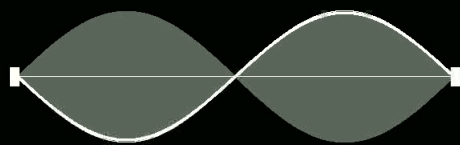
n – liczba węzłów w kierunku radialnym, węzły te są koncentrycznymi sferami wewnątrz gwiazdy

1-wymiarowe oscylacje

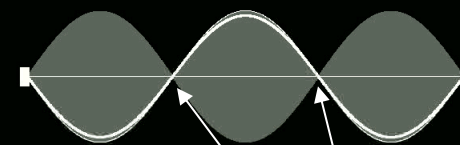
Mod fundamentalny



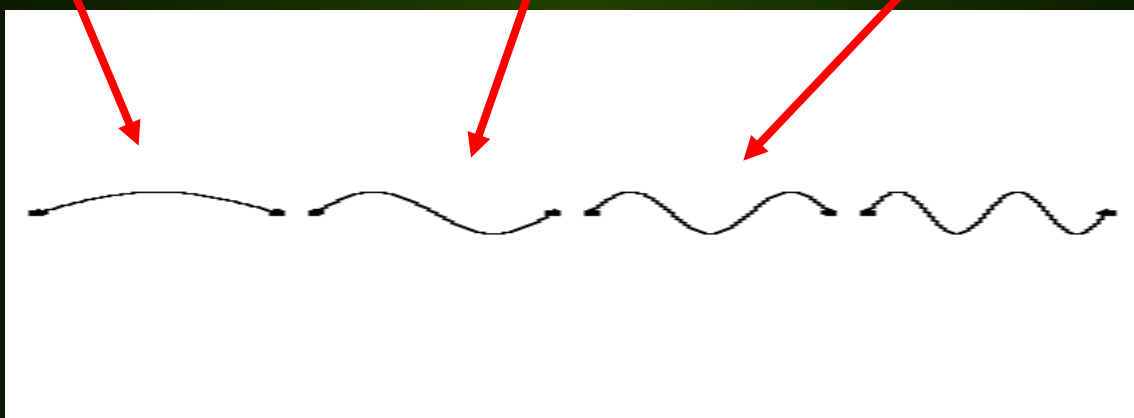
Pierwszy owerton



Drugi owerton

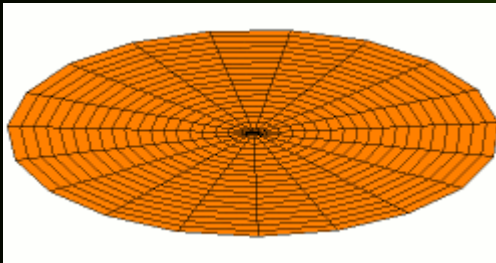


węzły

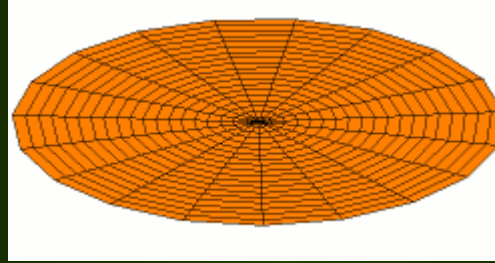


2-wymiarowe oscylacje radialne

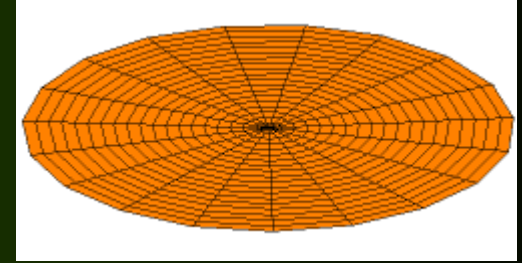
Mod fundamentalny



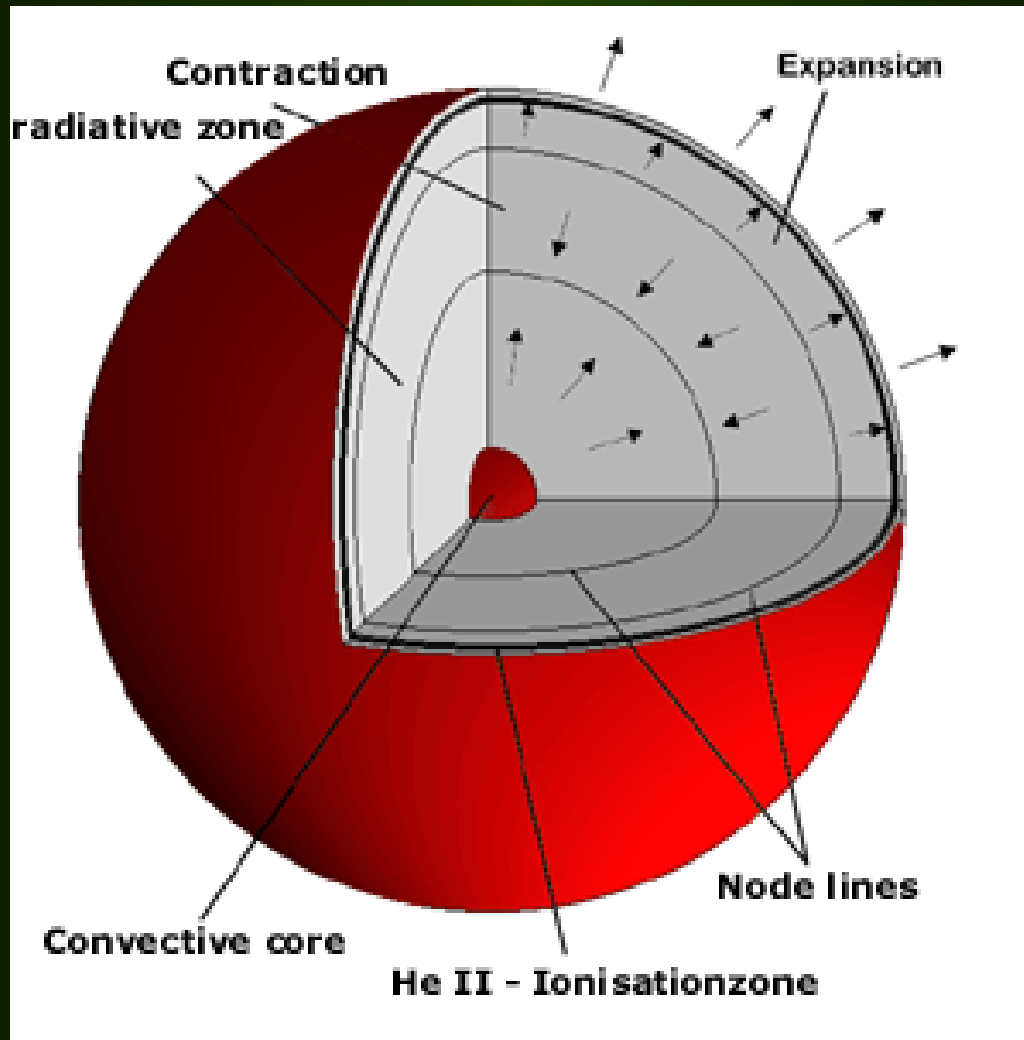
Pierwszy owerton



Drugi owerton

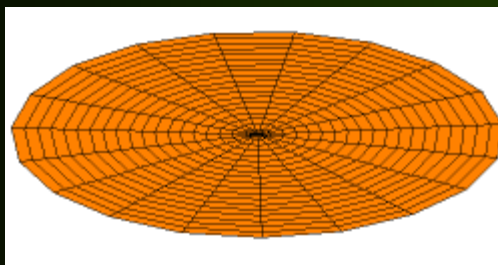
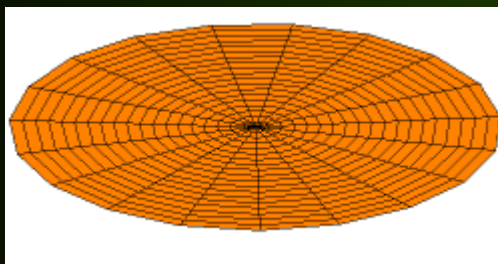
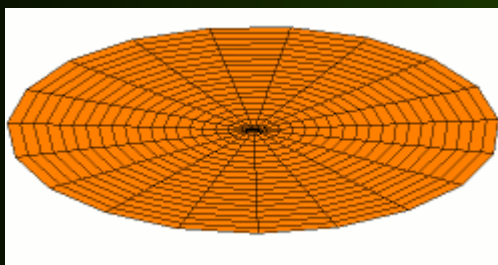


pulsacije radialne z $n=2$

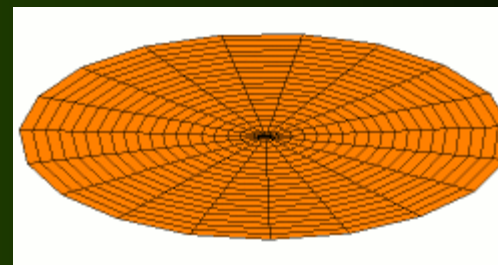
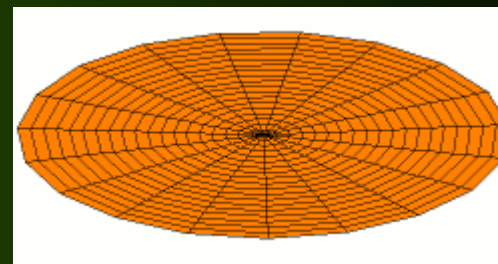
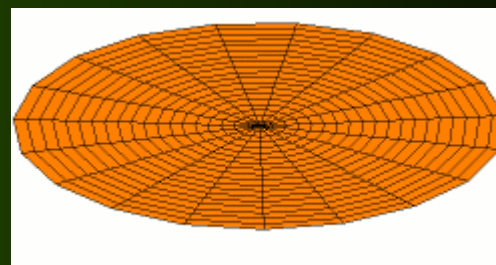


2-wymiarowe oscylacje nieradialne

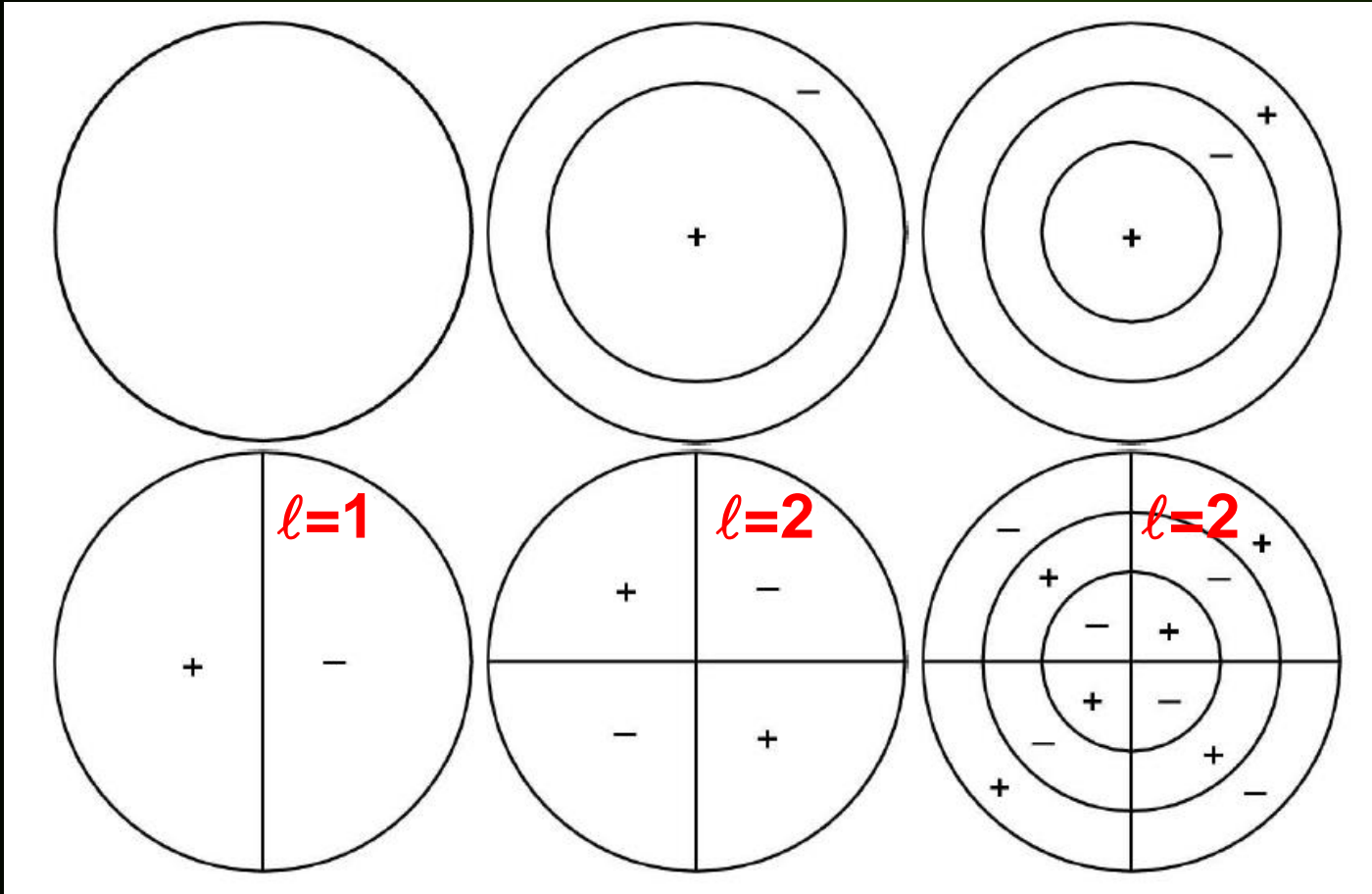
mod dipolowy



mod kwadrupolowy



Radialne i nieradialne oscylacje 2-wymiarowe



radialne

nieradialne

w gwiazdzie harmonika \neq owerton

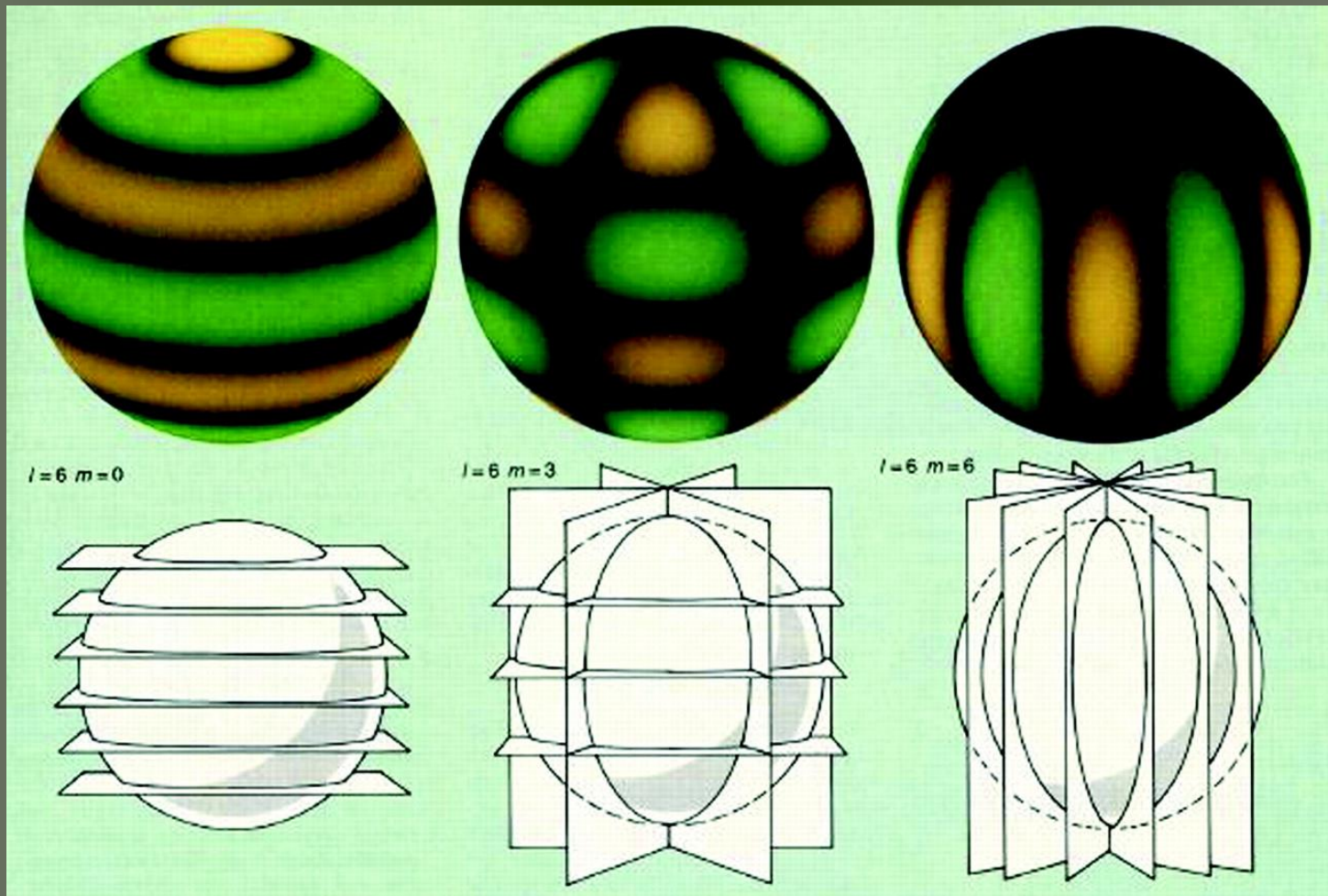
bo $c_s \neq \text{const}$, $c_s \sim T/\mu$

**Cefeidy klasyczne $P_2/P_1=0.71$
gwiazdy typu δ Scuti $P_2/P_1=0.77$**

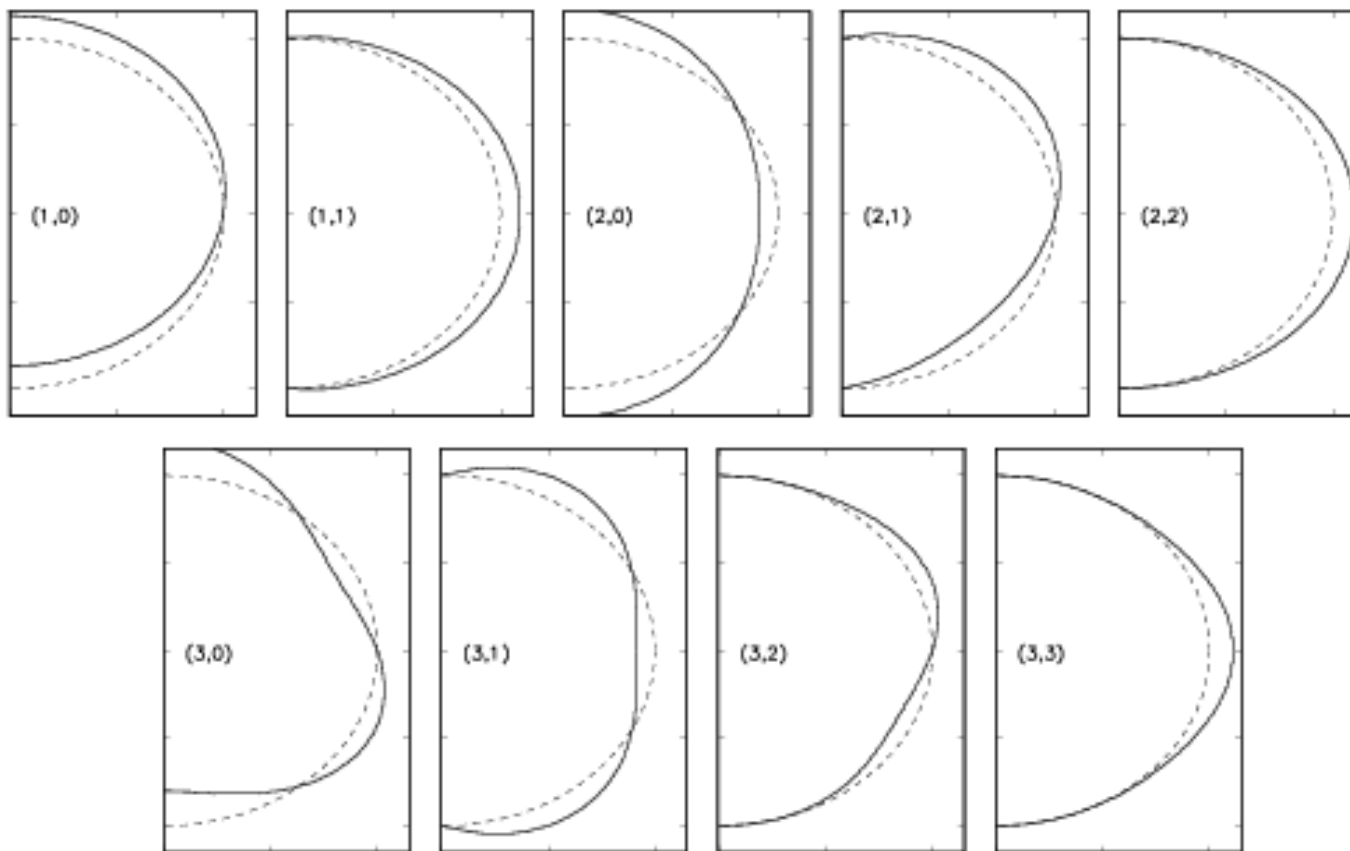
ℓ - całkowita liczba płaszczyzn węzłowych przecinających powierzchnię gwiazdy

$\ell - |m|$ - liczba płaszczyzn równoleżnikowych

3-wymiarowe oscylacje nieradialne $\ell=6$

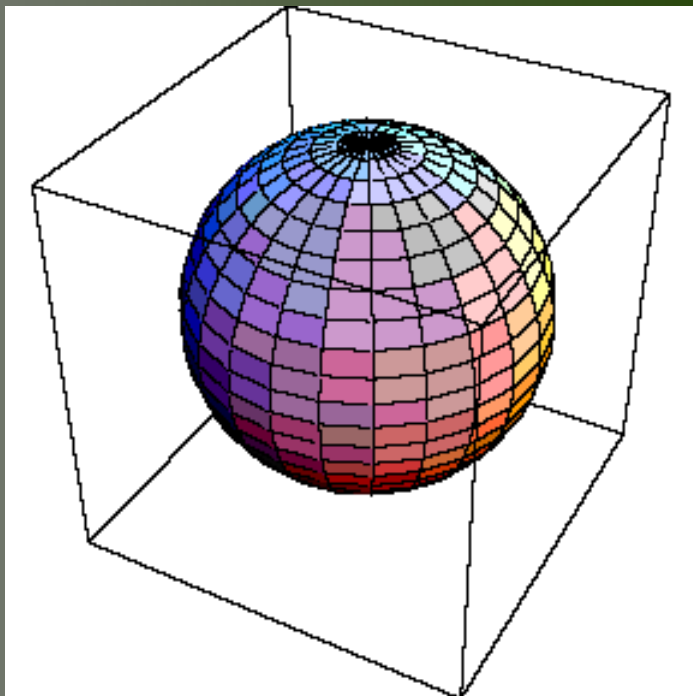


Harmoniki sferyczne stopni dla $\ell = 1, 2, 3$, $m=0,1,2,3$ przy $\varphi = 0$

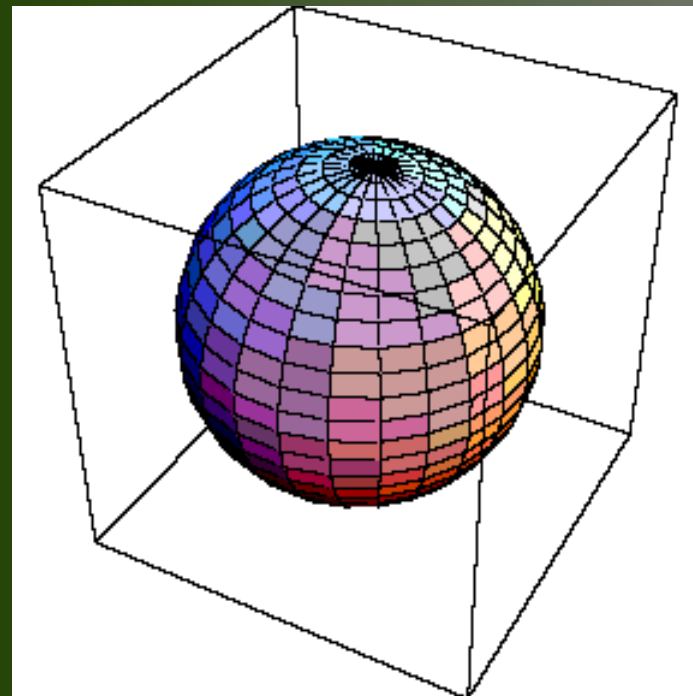


W. A. Dziembowski

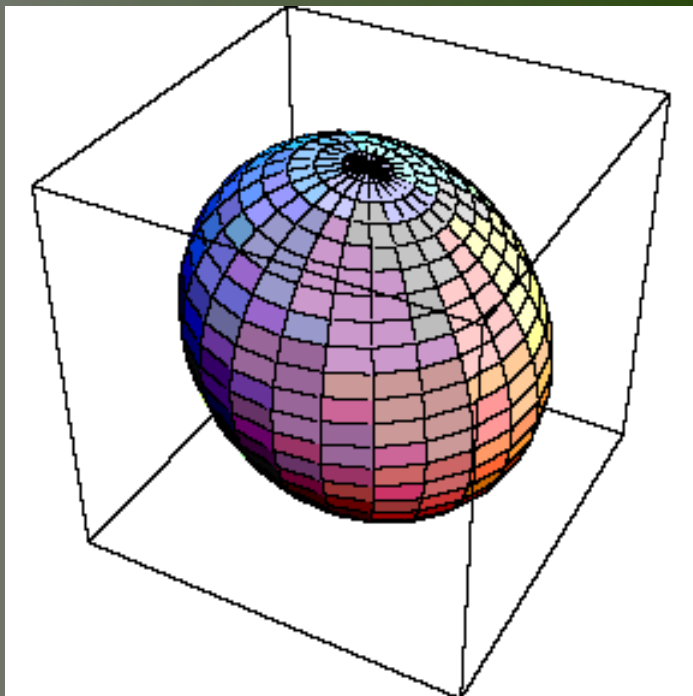
$\ell = 1, m=0$



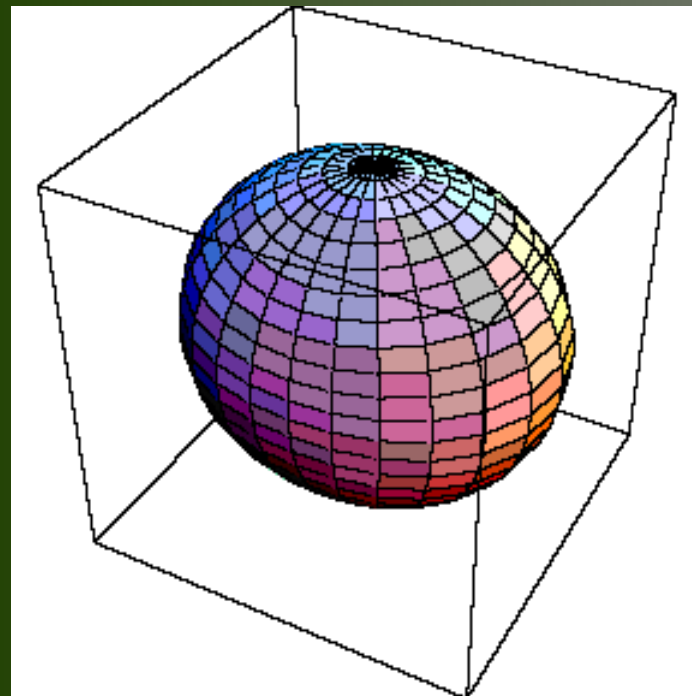
$\ell = 1, m=1$



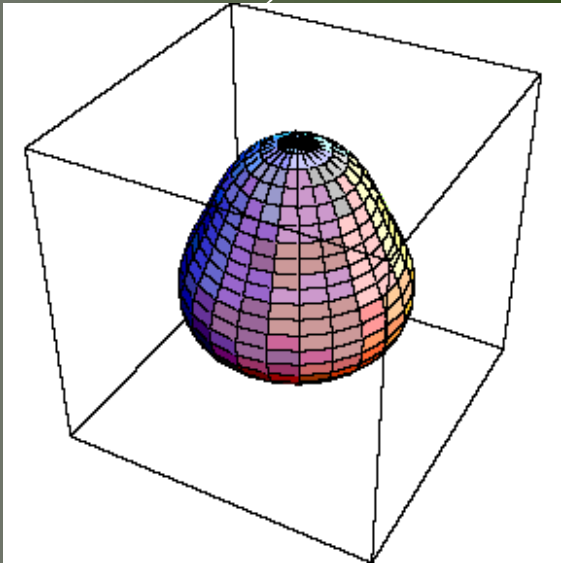
$\ell = 2, m=1$



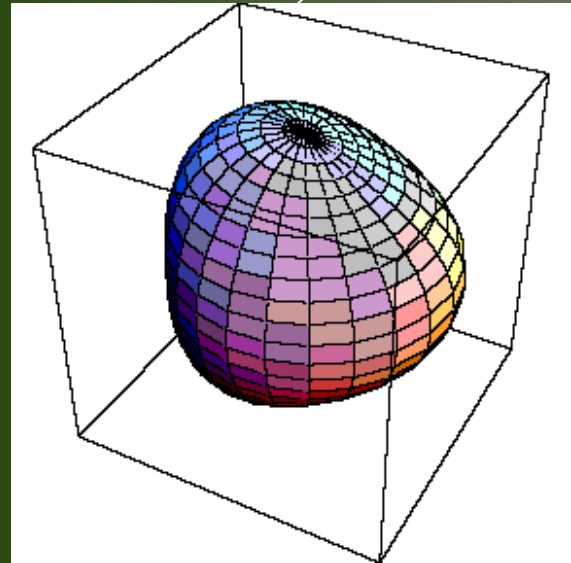
$\ell = 2, m=2$



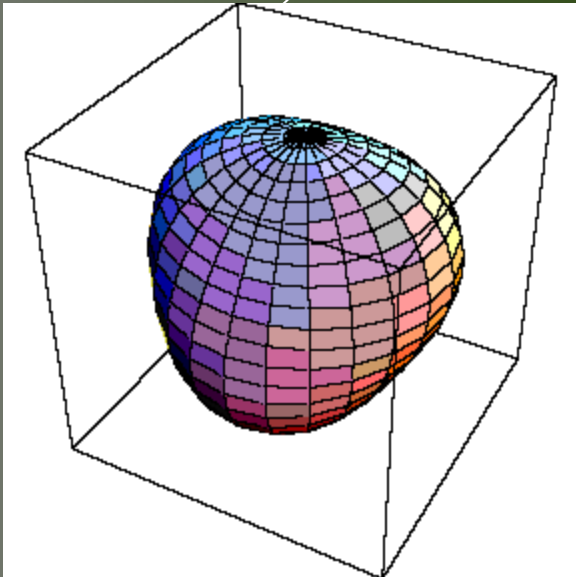
$\ell = 3, m=0$



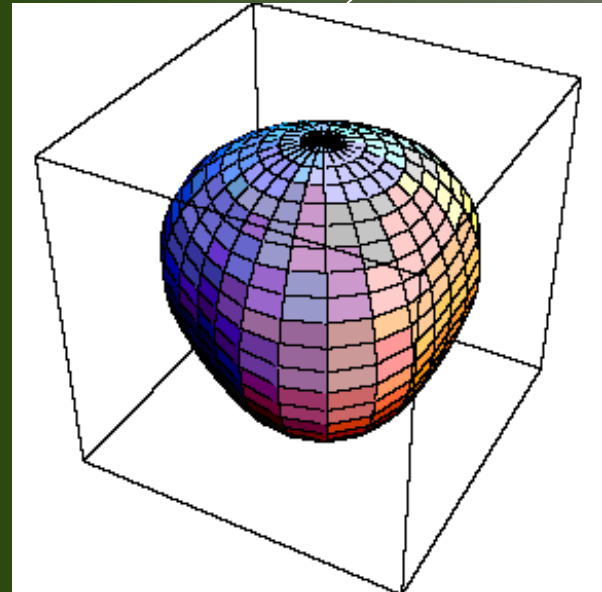
$\ell = 3, m=1$



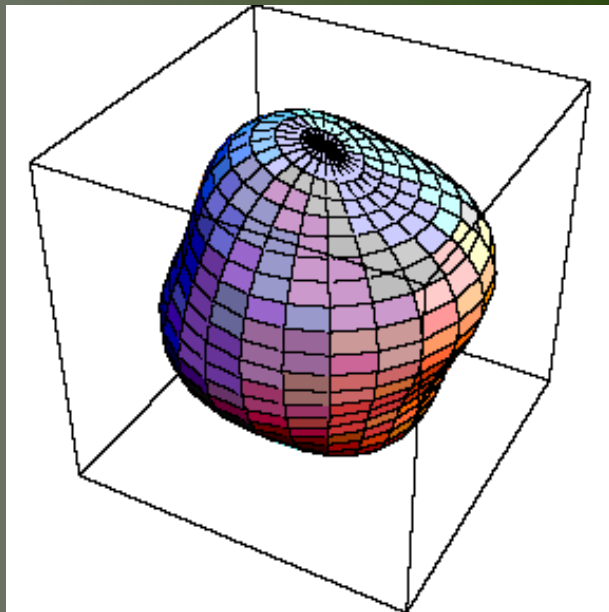
$\ell = 3, m=2$



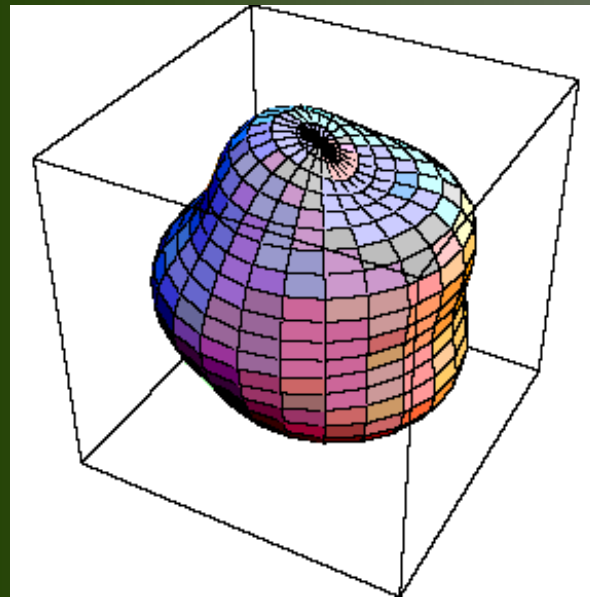
$\ell = 3, m=3$



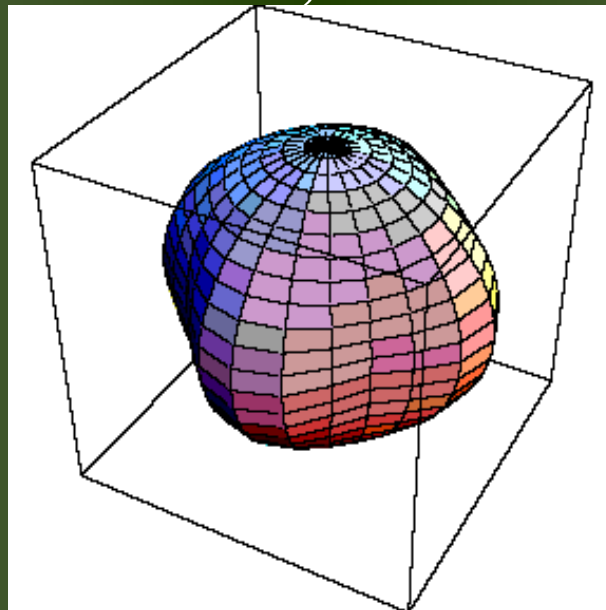
$\ell = 4, m=1$



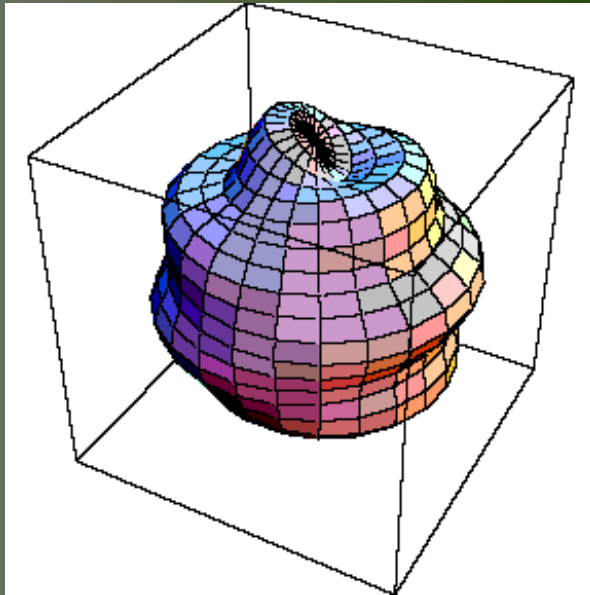
$\ell = 4, m=2$



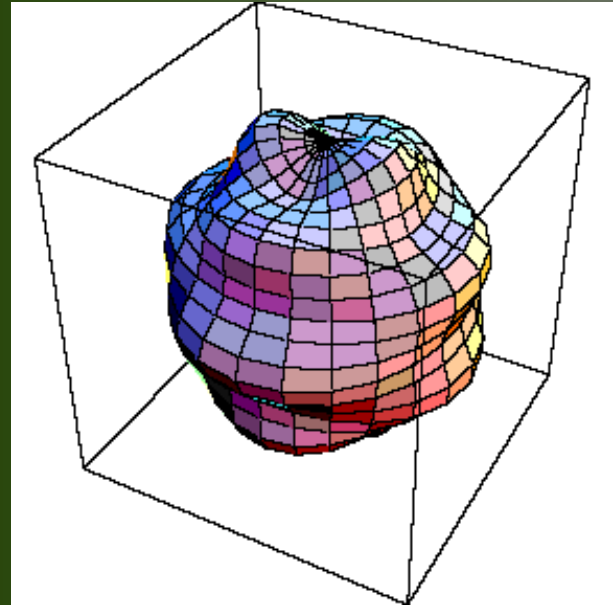
$\ell = 4, m=4$



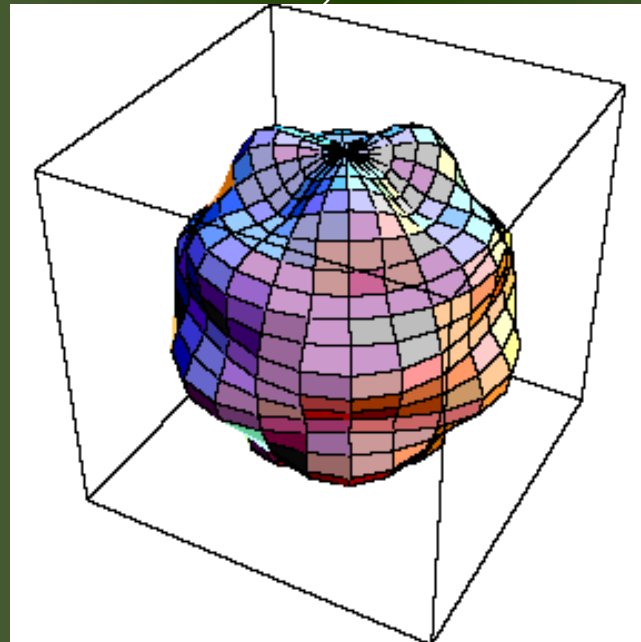
$\ell = 8, m=1$



$\ell = 8, m=2$



$\ell = 8, m=3$



FUNKCJE KULISTE

Zależności kątowe zmian wielkości fizycznych możemy opisać za pomocą funkcji kulistych (harmonik sferycznych):

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = N_{\ell}^m P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

Założenia:

- ✳ amplituda pulsacji jest mała
- ✳ gwiazda ma kształt sferycznie-symetryczny

$$\nabla_H^2 Y_\ell^m = -\ell(\ell + 1)Y_\ell^m$$

gdzie ∇_H^2 jest kątową częścią operatora Laplace'a

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ – zupełny zbiór funkcji ortonormalnych zdefiniowanych na sferze

$P_\ell^m(\cos\theta)$ - stowarzyszone funkcje Legendre'a

$$P_\ell^m(z) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-z^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{\ell+|m|}}{dz^{\ell+|m|}} (z^2-1)^\ell, \quad z = \cos \theta$$

N_ℓ^m - czynnik normujący

$$N_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \cdot \frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

dobrany tak, aby dla danego ℓ , harmoniki sferyczne tworzyły bazę ortonormalną

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_\ell^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$$

**Zaburzenie dowolnego parametru skalarnego,
np. temperatury, dla pojedynczego modu oscylacji,
możemy zapisać w postaci**

$$\delta T/T = f_n(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \exp(-i\omega_{n\ell m} t)$$

$f_n(r)$ –radialna funkcja własna

$\ell=0$ – oscylacje radialne

(szczególny przypadek oscylacji nieradialnych)

$\ell=1$ – dipol

$\ell=2$ – kwadrupol

$n=0$ - mod fundamentalny dla $\ell > 1$

$n=1$ - pierwszy overtone

$n=2$ - drugi overtone itd.

dla $\ell=0$ mody są numerowane od $n=1$

$m > 0$ mody współbieżne (prograde), poruszają się zgodnie z rotacją gwiazdy

$m < 0$ mody przeciwbieżne (retrograde)

$m = 0$ mody strefowe (zonal or axisymmetric modes)

$\ell = |m|$ mody sektoralne (sectoral modes)

pozostałe przypadki – mody teseralne (tesseral modes)

Mody normalne są opisane przez n i ℓ (degeneracja $2\ell+1$).

Rotacja, pole magnetyczne itp. wprowadzają rozszczepienie.

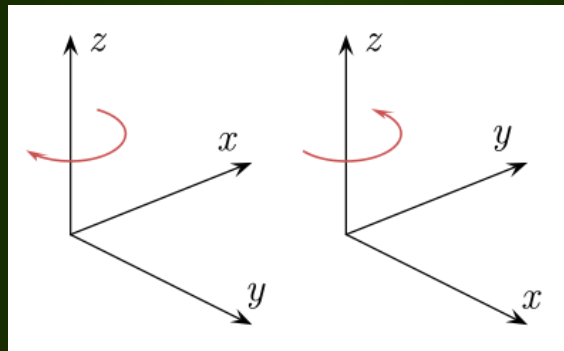
Wpływ rotacji na pulsacje będzie dyskutowany na osobnym wykładzie

PODSTAWOWE UKŁADY WSPÓLRZĘDNYCH

- * układ współrotujący z gwiazdą**
- * układ nieruchomy**
- * układ związany z obserwatorem**

Układ współrotujący z gwiazdą

Zakładamy, że gwiazda rotuje ze stałą częstością kątową $\Omega \geq 0$ wokół osi $\{\vec{\Omega}\}$. Wprowadzamy rotujący, prawoskrętny, ortogonalny układ współrzędnych kartezjańskich (x'', y'', z'') o początku w środku gwiazdy i osi z'' odpowiadającej $\{\vec{\Omega}\}$. Współrzędne sferyczne $(r'', \theta'', \varphi'')$ mają oś biegunową pokrywającą się z osią z'' .



lewoskrętny prawosk.

Układ nieruchomy

Prawoskrętny, ortogonalny układ o współrzędnych kartezyjskich (x', y', z') i początku w środku gwiazdy, oraz osi z' odpowiadającej z'' . Osie x'' i x' oraz y'' i y' są zgodne w chwili $t_0 = 0$. Współrzędne sferyczne (r', θ', φ') mają taką samą oś biegunową jak w poprzednim układzie.

Układ związany z obserwatorem

Prawoskrętny, inercjalny, ortogonalny układ o współrzędnych kartezyjskich (x, y, z) i początku w środku gwiazdy. Oś z jest skierowana w kierunku do obserwatora, a oś y pokrywa się z y' .

Oznacza to, że osie z, z', x, x' leżą w tej samej płaszczyźnie.

Kąt i między osiami z i z' nazywamy kątem inklinacji gwiazdy i mierzymy dodatnio od z do z' ; $i \in [0^\circ, 180^\circ]$.

Współrzędne sferyczne (r, θ, φ) mają oś biegunową pokrywającą się z kierunkiem do obserwatora.

TRANSFORMACJE MIĘDZY UKŁADAMI

Związek pomiędzy układem współrotującym z gwiazdą a układem nieruchomym we współrzędnych sferycznych

$$\begin{aligned}r'' &= r' \\ \theta'' &= \theta' \\ \varphi'' &= \varphi' - \Omega t\end{aligned}$$

Przejście między układami (r', θ', φ') i (r, θ, φ) jest bardziej złożone.

Położenie dwóch układów ortokartezjańskich względem siebie, o wspólnym początku, tej samej skali i orientacji, jest określone przez dziewięć kątów

$$\alpha_1 = \angle(Ox', Ox) \quad \beta_1 = \angle(Ox', Oy) \quad \gamma_1 = \angle(Ox', Oz)$$

$$\alpha_2 = \angle(Oy', Ox) \quad \beta_2 = \angle(Oy', Oy) \quad \gamma_2 = \angle(Oy', Oz)$$

$$\alpha_3 = \angle(Oz', Ox) \quad \beta_3 = \angle(Oz', Oy) \quad \gamma_3 = \angle(Oz', Oz)$$

Które pozwalają na wyrażenie jednych współrzędnych (x,y,z) przez drugie (x',y',z')

$$x' = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1,$$

$$y' = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2,$$

$$z' = x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3,$$

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3,$$

$$y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3,$$

$$z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3.$$

Ponieważ zachodzą następujące relacje:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

$$\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 = 1$$

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1$$

$$\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 = 0$$

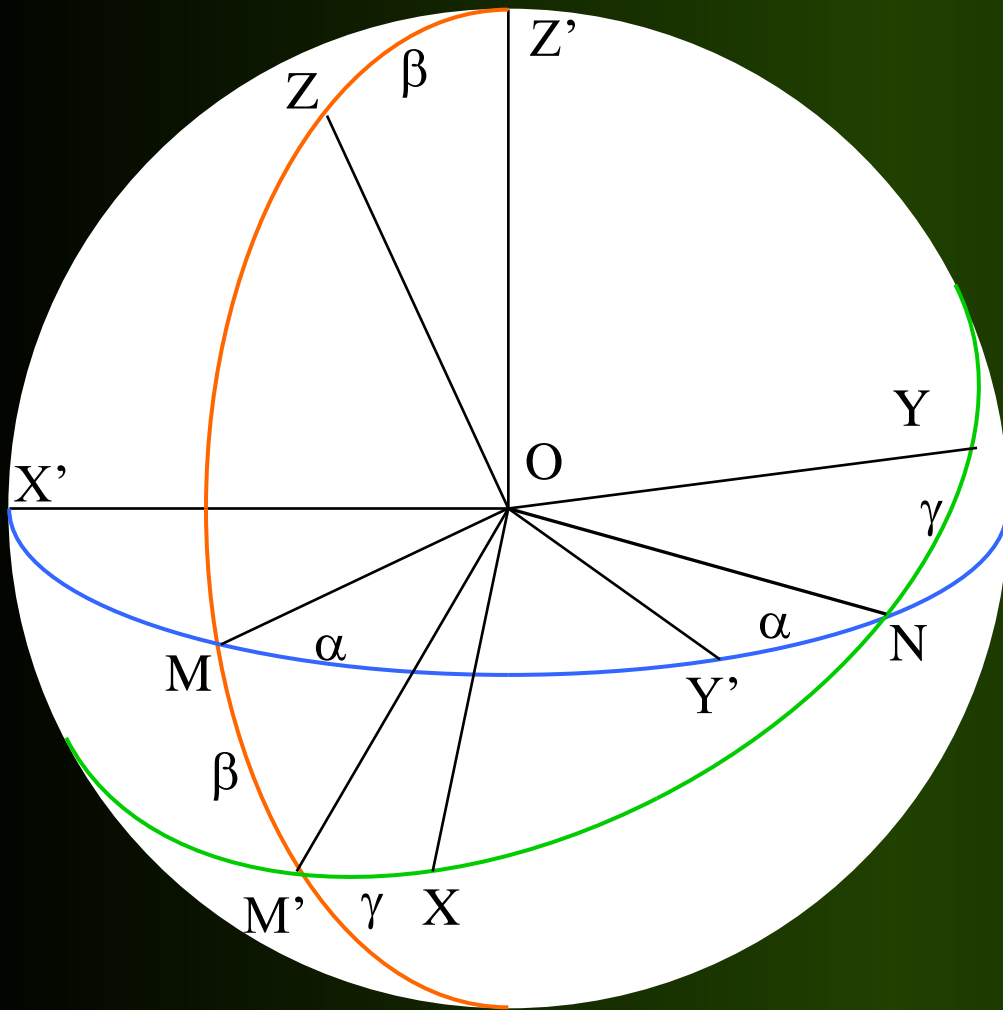
$$\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 = 0$$

$$\cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3 = 0$$

Tylko trzy kąty są niezależne, są to **kąty Eulera** (α, β, γ).

Kąty Eulera

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad -\pi \leq \gamma \leq \pi$$

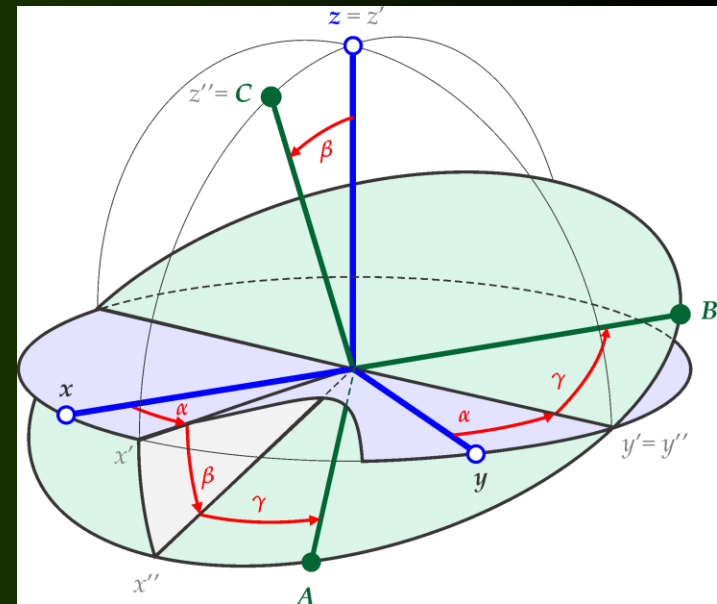


$$\alpha = \angle(\text{OY}', \text{ON})$$

$$\beta = \angle(\text{OZ}, \text{OZ}')$$

$$\gamma = \angle(\text{ON}, \text{OY}),$$

ON - krawędź przecięcia się
płaszczyzn **XOY** i **X'OY'**



Zapisy macierzowe opisujące kolejne obroty mają postać

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Współczynniki przekształcenia (Smirnow, 1962)

$$a_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

Możemy więc napisać

$$x'_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} x_k$$

i odwrotnie

$$x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} x'_k$$

W przypadku układu związanego z obserwatorem oś y pokrywa się z y' , a osie z, z', x, x' leżą w tej samej płaszczyźnie. Czyli:

$$\alpha=\gamma=0, \beta=i$$

Macierz transformacji między układami (r', θ', ϕ') i (r, θ, ϕ)

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \\ \phi' \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial \theta'} & \frac{\partial r}{\partial \phi'} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r'} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta}{\partial \phi'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r'} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta'} & \frac{\partial \phi}{\partial \phi'} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos i - \sin i \cos \phi \cot \theta}{N(\theta, \phi)} & -\sin \phi \sin i \\ 0 & \frac{\sin \phi \sin i}{\sin^2 \theta N(\theta, \phi)} & \cos i - \cos \phi \sin i \cot \theta \end{pmatrix}$$

$$N(\theta, \phi) = \sqrt{\sin^2 \phi + (\cos i \cos \phi - \sin i \cot \theta)^2},$$

Element powierzchni i jego normalna

Wektor elementu powierzchni, $d\vec{S}$, możemy rozłożyć na składowe

$$d\vec{S} = \vec{n}dS = (\vec{i}dS_x, \vec{j}dS_y, \vec{k}dS_z)$$

które wyrażają się poprzez jakobiany

$$dS_x = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)}d\theta d\phi,$$

$$dS_y = \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)}d\theta d\phi,$$

$$dS_z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)}d\theta d\phi.$$

Wektor \vec{n} jest normalną do powierzchni $d\vec{S}$ (Korn & Korn 1961)

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi}{|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi|} = \\ &= \frac{\vec{i}\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} + \vec{j}\frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} + \vec{k}\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)}}{\left[\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 \right]^{1/2}},\end{aligned}$$

gdzie

$$\vec{r}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta},$$

$$\vec{r}_\phi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}.$$

Pole elementu powierzchni liczymy według formuły

$$dS = |d\vec{S}| = |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi| d\theta d\phi$$
$$= \left[\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \right]^2 \right]^{1/2} d\theta d\phi.$$

Dla gwiazdy sferycznie symetrycznej element ten wynosi

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

a jego poszczególne składowe

$$dS_x = R^2 \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$dS_y = R^2 \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi,$$

$$dS_z = R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi,$$

gdzie R oznacza promień gwiazdy.

Składowe elementu masy

Jeżeli gwiazda pulsuje nieradialnie to zmieniają się wszystkie składowe elementu masy, czyli

$$r \rightarrow R + \delta r(R, \theta, \phi),$$

$$\theta \rightarrow \theta + \delta\theta(R, \theta, \phi),$$

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi(R, \theta, \phi).$$

Zakładając, że $\delta r, \delta\theta, \delta\phi$ są małymi zaburzeniami, możemy zlinearyzować równania

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Jako wynik otrzymamy

$$x_p = R(\sin \theta \cos \phi - \delta\phi \sin \theta \sin \phi + \delta\theta \cos \theta \cos \phi) + \delta r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y_p = R(\sin \theta \sin \phi + \delta\phi \sin \theta \cos \phi + \delta\theta \cos \theta \sin \phi) + \delta r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z_p = R(\cos \theta - \delta\theta \sin \theta) + \delta r \cos \theta.$$

Składowe elementu powierzchni gwiazdy pulsującej

Składowe pola elementu powierzchni gwiazdy pulsującej nieradialnie

$$dS_x = \left[R \sin \theta \cos \phi (R \sin \theta + 2 \sin \theta \delta r - \cos \theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + 2R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \delta \theta \right.$$

$$\left. - R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \delta \phi + R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) + R \sin \phi \frac{\partial \delta r}{\partial \phi} \right] d\theta d\phi,$$

$$dS_y = \left[R \sin \theta \sin \phi (R \sin \theta + 2 \sin \theta \delta r - \cos \theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + 2R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \delta \theta \right.$$

$$\left. + R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \delta \phi + R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) - R \cos \phi \frac{\partial \delta r}{\partial \phi} \right] d\theta d\phi,$$

$$dS_z = \left[R \sin \theta (R \cos \theta + 2 \cos \theta \delta r + \sin \theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \delta \theta \right.$$

$$\left. + R^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) \right] d\theta d\phi.$$

Pole elementu powierzchni w przypadku małych zaburzeń

$$dS = R^2 \sin \theta \left[1 + 2 \frac{\delta r}{R} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \delta \theta + \frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right] d\theta d\phi.$$

Funkcje kuliste w różnych układach odniesienia

$$Y_\ell^m(\theta', \phi') = O_{R(\alpha, \beta, \gamma)} Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_\ell^k(\theta, \phi)$$

$$d_{\ell m k}(i) = \sum_r (-1)^{k-m-r} \frac{[(\ell+m)! (\ell-m)! (\ell+k)! (\ell-k)!]^{1/2}}{r! (\ell+m-r)! (\ell-k-r)! (k-m+r)!} \cdot \left(\cos \frac{i}{2}\right)^{2\ell+m-k-2r} \left(\sin \frac{i}{2}\right)^{k-m+2r}$$

$$r \geq 0, r \geq m - k, r \leq \ell - k, r \leq \ell + m$$

Hamermesh 1968

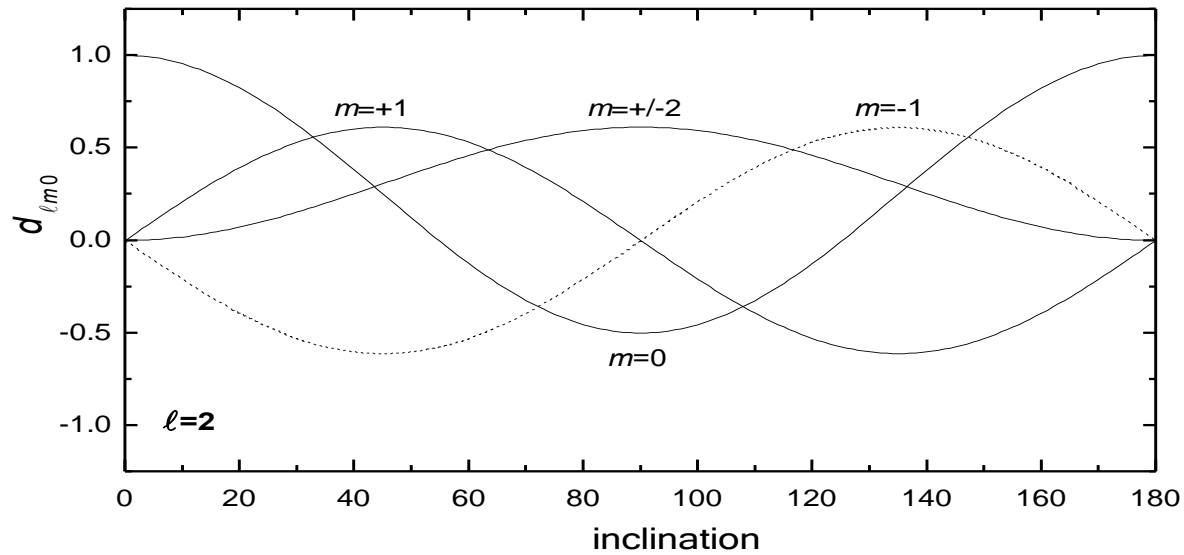
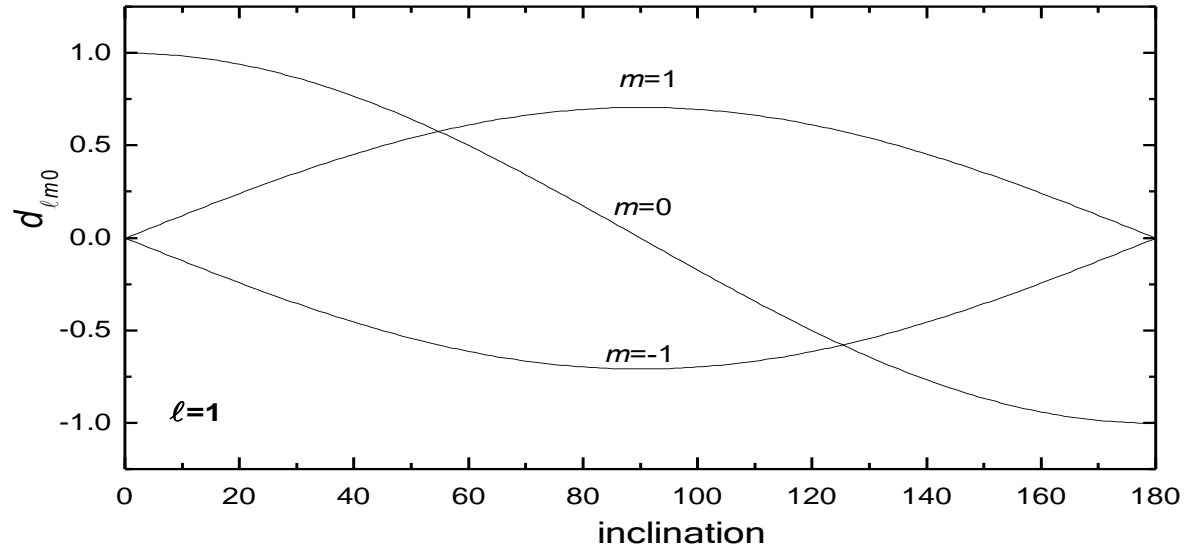
O_R –operator związany z grupą obrotów o kąty Eulera (α, β, γ).

W naszym przypadku: $\alpha=\gamma=0$ $\beta=i$.

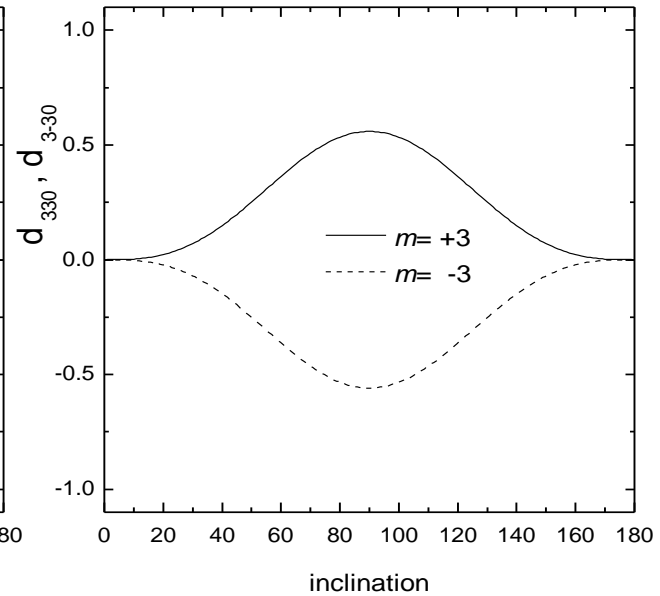
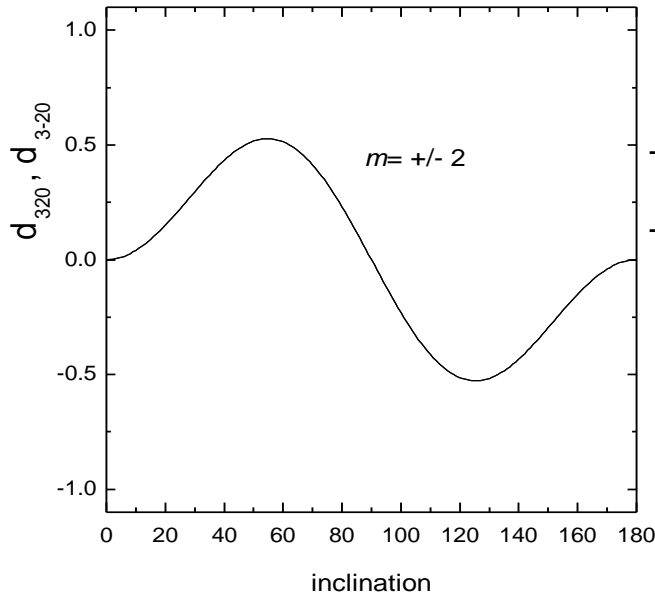
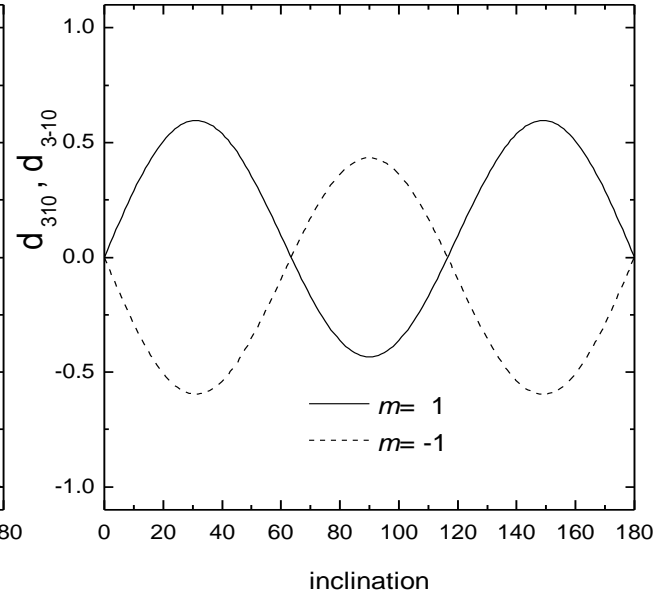
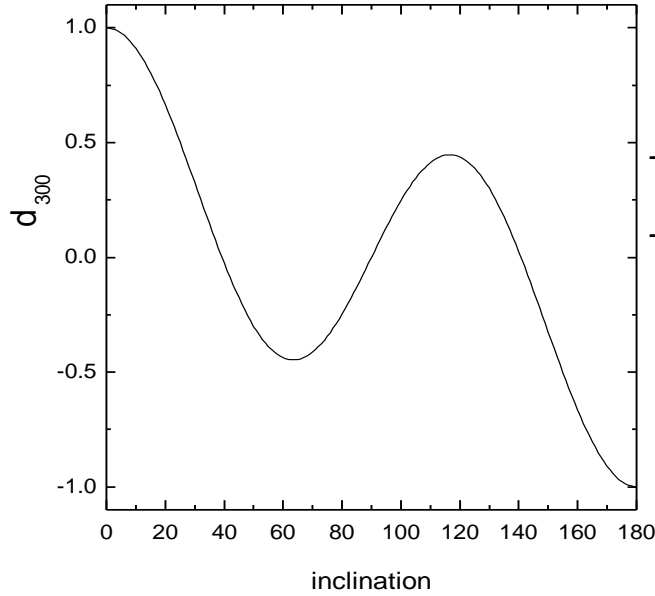
$d_{\ell m k}$ – reprezentacje grupy obrotów

$d_{\ell m 0}$ – funkcjami Wignera ($k=0$).

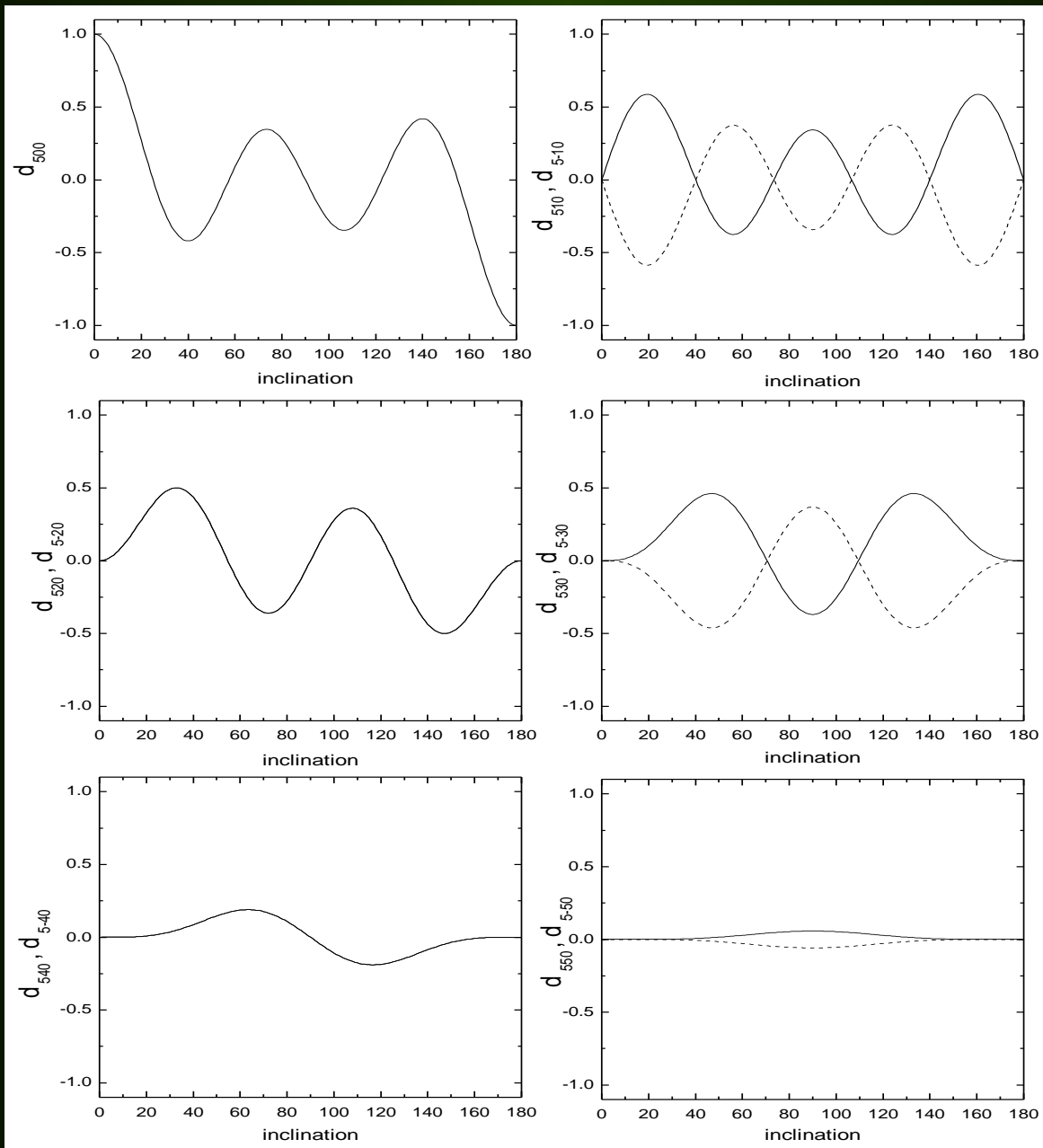
Funkcje Wignera, $d_{\ell m 0}$, dla $\ell=1,2$



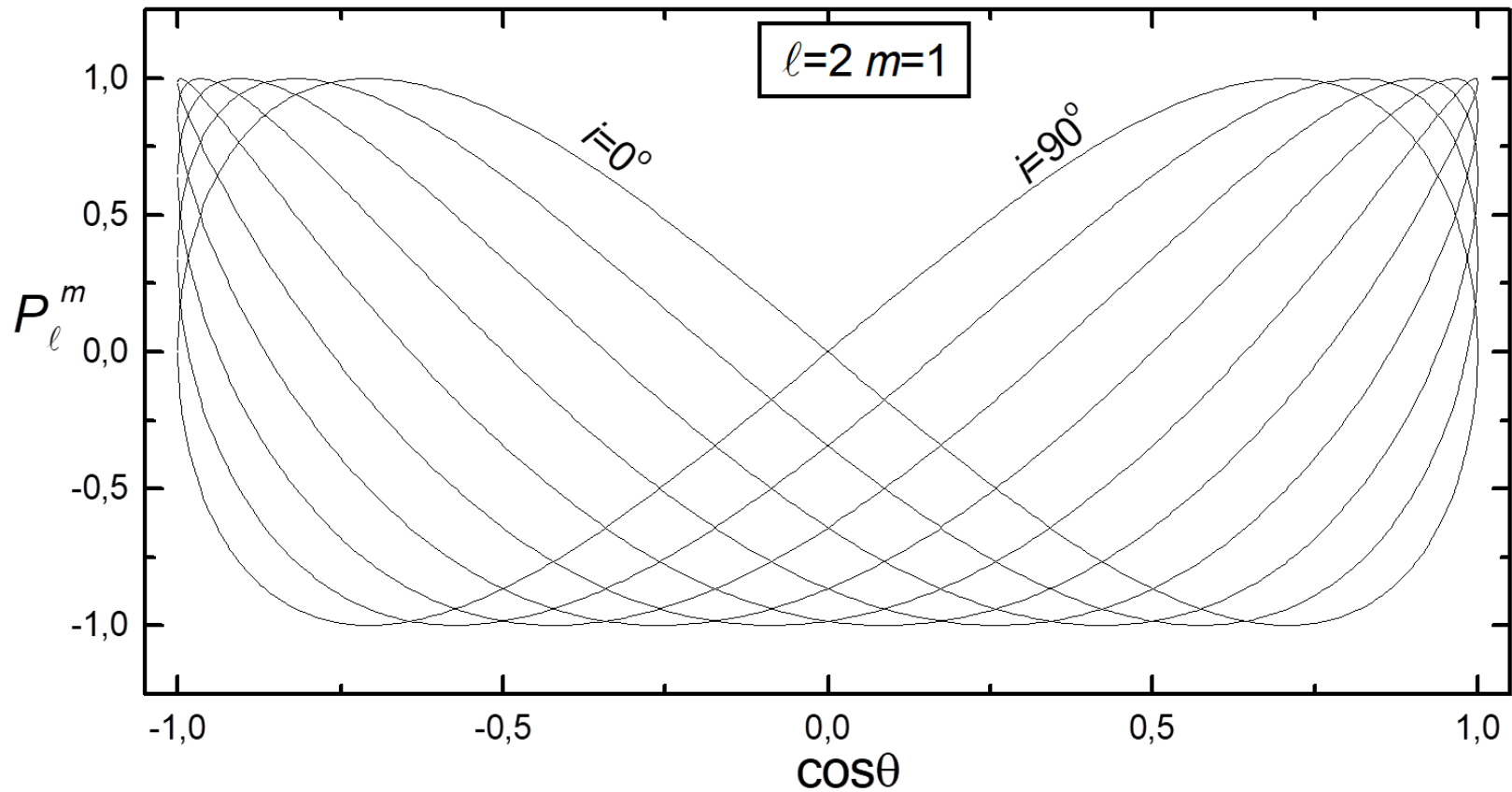
Funkcje Wignera, $d_{\ell m 0}$, dla $\ell=3$



Funkcje Wignera, $d_{\ell m 0}$, dla $\ell=5$



Funkcje Legendre'a, $P_\ell^m(\cos\theta)$, dla $\ell=2, m=1$



Mody nieradialne dzielimy na dwie grupy (Cowlinga):

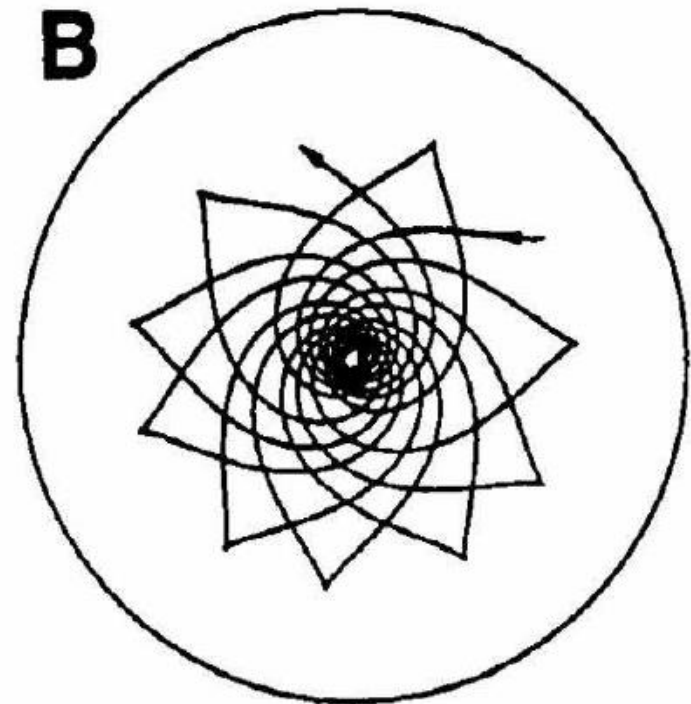
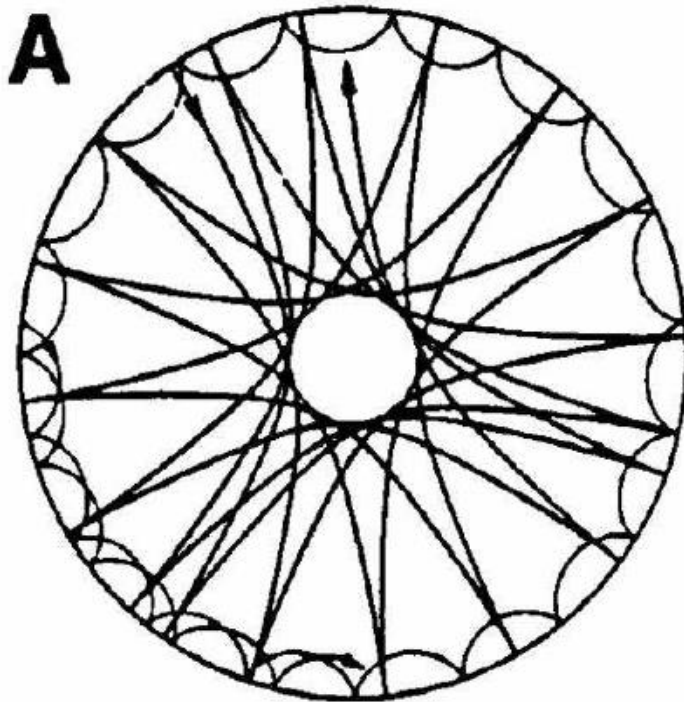
mody p (akustyczne) – siłą reakcji jest ciśnienie

mody g (grawitacyjne) – siłą reakcji jest siła wyporu

Obszary pułapkowania dla Słońca

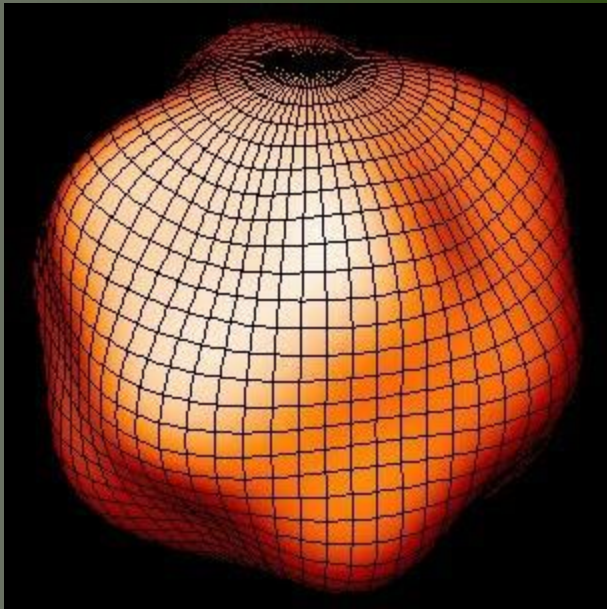
mody p
 $\ell=2, 100, n=8$

mod g
 $\ell=5, n=10$

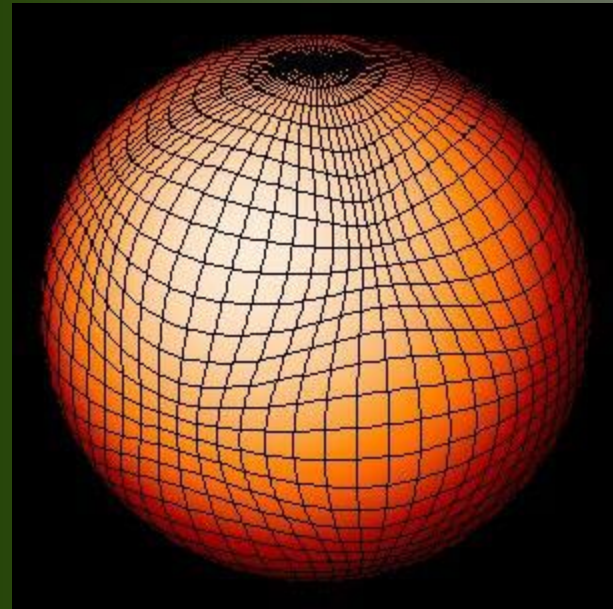


$\ell=6, m=+4$

mod p



mod g



**Lokalne własności oscylacji są opisane przez
dwie charakterystyczne częstotliwości:**

1. **Lamba, L_ℓ^2**
2. **Brunta-Väisälä, N^2**

Częstotliwość Lamba (akustyczna), L_ℓ^2
- odwrotność czasu potrzebnego na przebycie jednej
długości fali horyzontalnej z prędkością dźwięku

$$L_\ell^2 = (\mathbf{k}_h \mathbf{c})^2 = \ell(\ell+1) c^2 / r^2$$

$$\mathbf{k}_h = 2\pi/\lambda_h, \quad c^2 = \Gamma_1 p / \rho, \quad \Gamma_1 = (d \ln p / d \ln \rho)_{ad}$$

\mathbf{k}_h - falowa liczba horyzontalna, Γ_1 - wykładnik adiabaty
 λ_h - horyzontalna długość fali

$$\mathbf{k}_h = [\ell(\ell+1)]^{1/2} / r \approx \ell / r \quad - \text{ dla wysokich stopni } \ell$$

Fala akustyczna pokonuje drogę $\lambda_h \approx 2\pi r / \ell$ ruchem horyzontalnym z okresem $2\pi / L_\ell$

Częstotliwość **Brunta-Väisälä**, N^2

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right)$$

N^2 – częstotliwość z jaką element gazu może oscylować wokół położenia równowagi po wpływie siły grawitacji

$$\omega^2 > L_\ell^2, N^2$$

mody o wysokich częstotliwościach (ciśnieniowe)

$$\omega^2 < L_\ell^2, N^2$$

mody o niskich częstotliwościach (grawitacyjne)

$$L_\ell^2 > \omega^2 > N^2 \text{ lub } L_\ell^2 < \omega^2 < N^2$$

obszary znoszenia oscylacji

Diagram propagacji dla politropy $n=3$

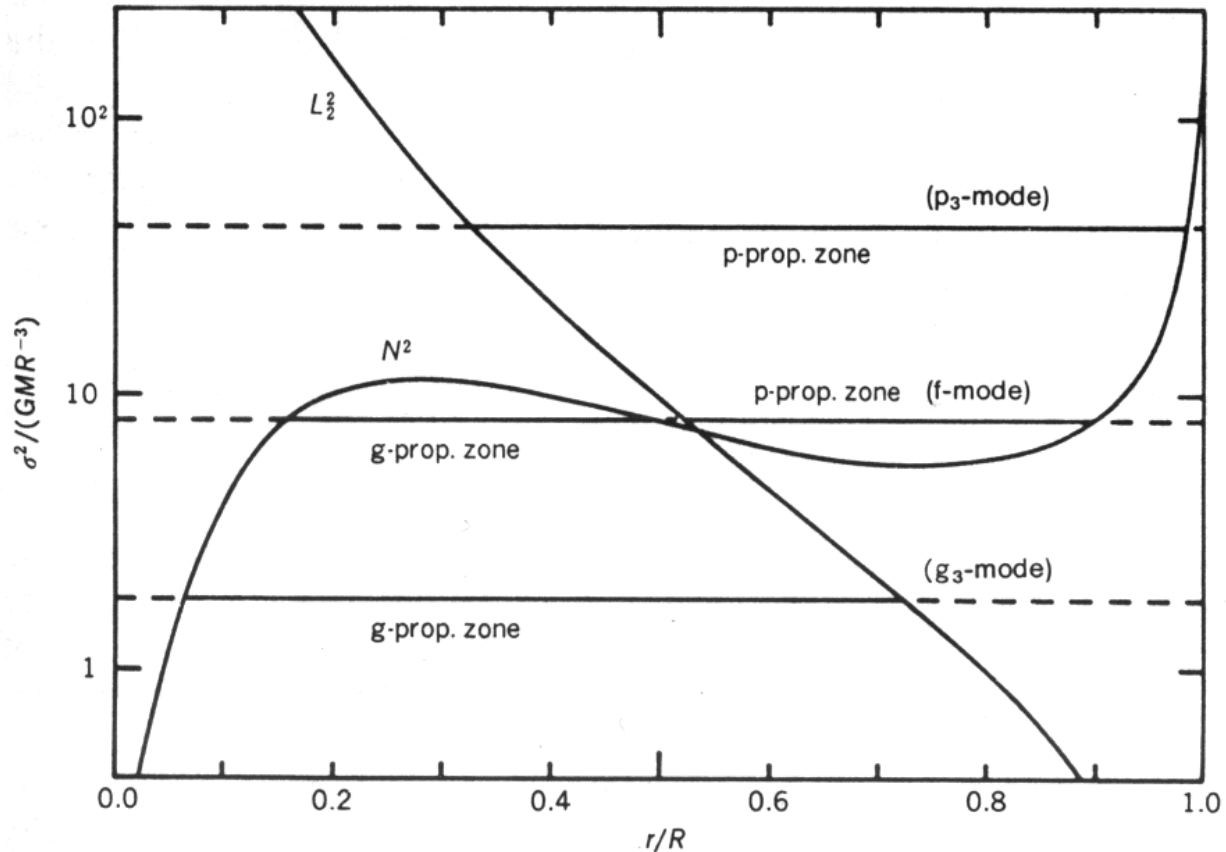


Fig. 4.2 Variations of N^2 and L_2^2 (normalized by GM/R^3) with respect to r/R for a polytrope (with the polytropic index 3) model. Three horizontal lines show the wave propagation zones (thin full lines) for the p_3 -mode, the f-mode, and g_3 -mode of spherical harmonic degree $l = 2$.

**Obszary pułapkowania dla modu g (100 μHz)
i modu p (2000 μHz) o $\ell=20$ dla modelu Słońca**

