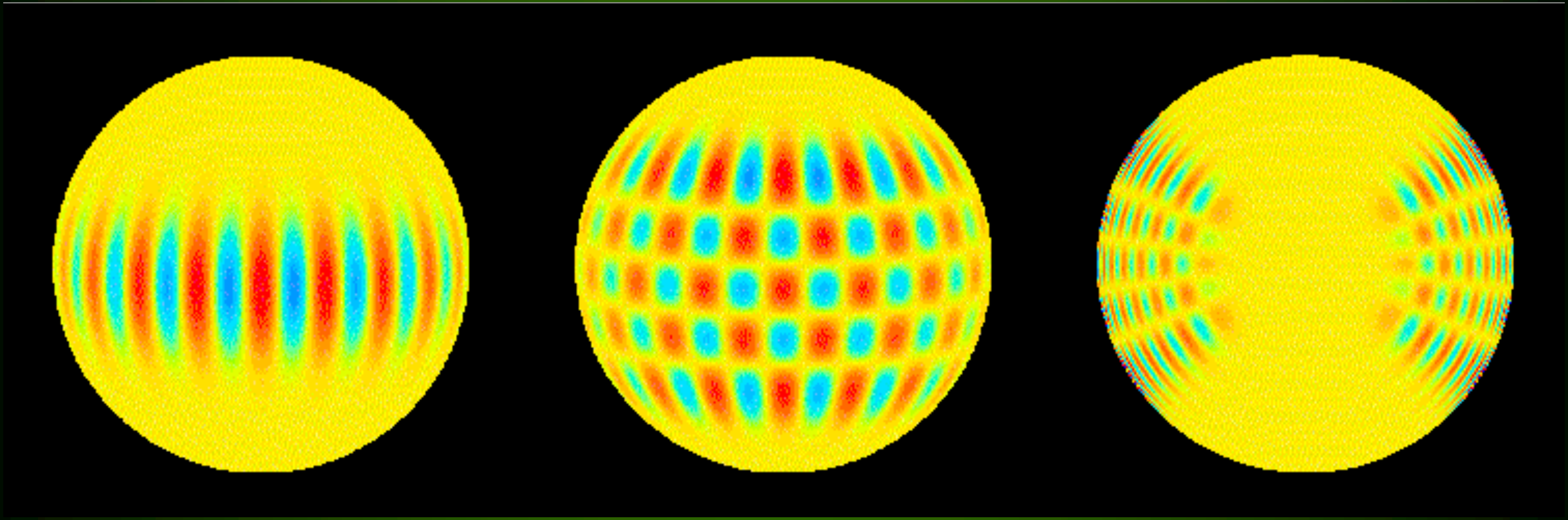


PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2019/2020

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

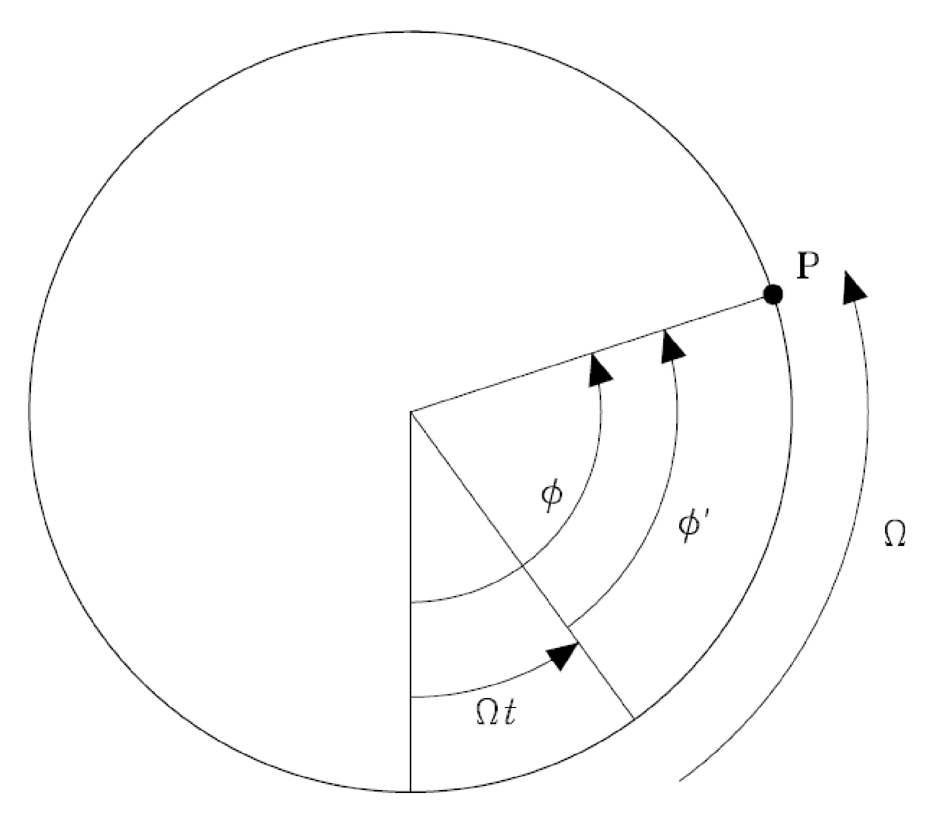
EFEKTY ROTACJI

W gwieździe sferycznie symetrycznej częstotliwości oscylacji są niezależne od azymutalnego rzędu, m (degeneracja 2ℓ+1).

Odejście od symetrii sferycznej powoduje, że częstotliwości są rozszczepiane według m.

Najważniejszą tego przyczyną, i najbardziej oczywistą, jest rotacja.

Geometria rozszczepienia rotacyjnego, w gwieździe rotującej z prędkością kątową Ω. Punkt P ma długość astrograficzną ϕ’ w układzie rotującym z gwiazdą oraz długość ϕ=ϕ’+ Ωt w układzie nieruchomym.



Zależność czasowa w układzie współrotującym:

$$\cos(m\,\phi' - \omega_0 t)$$

ω_0 – częstotliwość oscylacji w układzie współrotującym

$$\phi' = \phi - \Omega t$$

$$\cos(m\phi - m\,\Omega t - \omega_0 t) \equiv \cos(m\phi - \omega_m t)$$

$$\omega_m = \omega_0 + m\Omega$$

czyli odstęp w częstotliwościach
jest równy prędkości kątowe rotacji

Ten prosty opis dotyczy najważniejszego efektu rotacji, tak zwanej adwekcji .

Zakładamy w nim sztywną rotację oraz zaniedbujemy efekty siły Coriolisa i siły odśrodkowej.

EFEKTY POWOLNEJ ROTACJI

Zaniedbujemy siłę odśrodkową oraz inne efekty drugiego i wyższych rzędów w Ω. W szczególności zaniedbujemy efekty dystorsji.

Odpowiednio zmodyfikowane równanie ruchu w układzie inercjalnym ma postać

$$\omega^2 \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} = \frac{1}{\rho}\nabla p' - \mathbf{g}' - \frac{\rho'}{\rho}\mathbf{g} + 2m\omega\Omega\boldsymbol{\delta}\mathbf{r} - 2i\omega\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} \ ,$$

Efekt rotacji rzędu O(Ω) pochodzący od adwekcji

Efekt siły Coriolisa

Człony pochodzące od rotacji dostajemy przez odpowiednią modyfikację operatora siły w równaniu

$$\omega^2 \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}) \ ,$$

Efekt zmiany w częstotliwościach oscylacji możemy policzyć z zasady wariacyjnej

$$\delta\omega^2 = \frac{\int_V \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}^* \cdot \delta\mathcal{F}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r})\rho \mathrm{d}V}{\int_V |\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}|^2 \rho \mathrm{d}V} \ ,$$

Wynik zapisujemy w postaci

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} + m \int_0^R \int_0^\pi K_{nlm}(r,\theta)\Omega(r,\theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

rotacyjne jądro całki, K_{nlm}, możemy policzyć
z funkcji własnych dla modelu nierotującego

Ponieważ:
$K_{nlm} \propto m^2$

to $\omega_{nlm} - \omega_{nl0}$ jest nieparzystą funkcją m:
$\delta\, \omega_{nl-m} = -\delta\, \omega_{nlm}$

Ogólne wyrażenie na K_{nlm} jest dość skomplikowane. Znaczne uproszczenie otrzymujemy zakładając

$\Omega=\Omega(r)$

Odpowiadające temu przypadkowi jądro całki nie zależy od m, czyli równanie na ω_{nlm} przewiduje jednorodne rozszczepienie rotacyjne.

Wynik zapisujemy zazwyczaj w postaci:

$$\delta\omega_{nlm} \equiv \omega_{nlm} - \omega_{nl0} = m\beta_{nl} \int_0^R K_{nl}(r)\Omega(r)\mathrm{d}r \ ,$$

$$K_{nl} = \frac{\left(\xi_r^2 + \xi_\mathrm{h}^2 - 2L^{-1}\xi_r\xi_\mathrm{h} - L^{-2}\xi_\mathrm{h}^2\right) r^2\rho}{\int_0^R \left(\xi_r^2 + \xi_\mathrm{h}^2 - 2L^{-2}\xi_r\xi_\mathrm{h} - L^{-2}\xi_\mathrm{h}^2\right) r^2\rho\mathrm{d}r} \ ,$$

$L^2 = \ell\,(\ell+1)$

$\beta_{nl} = 1 - C_{nl}$

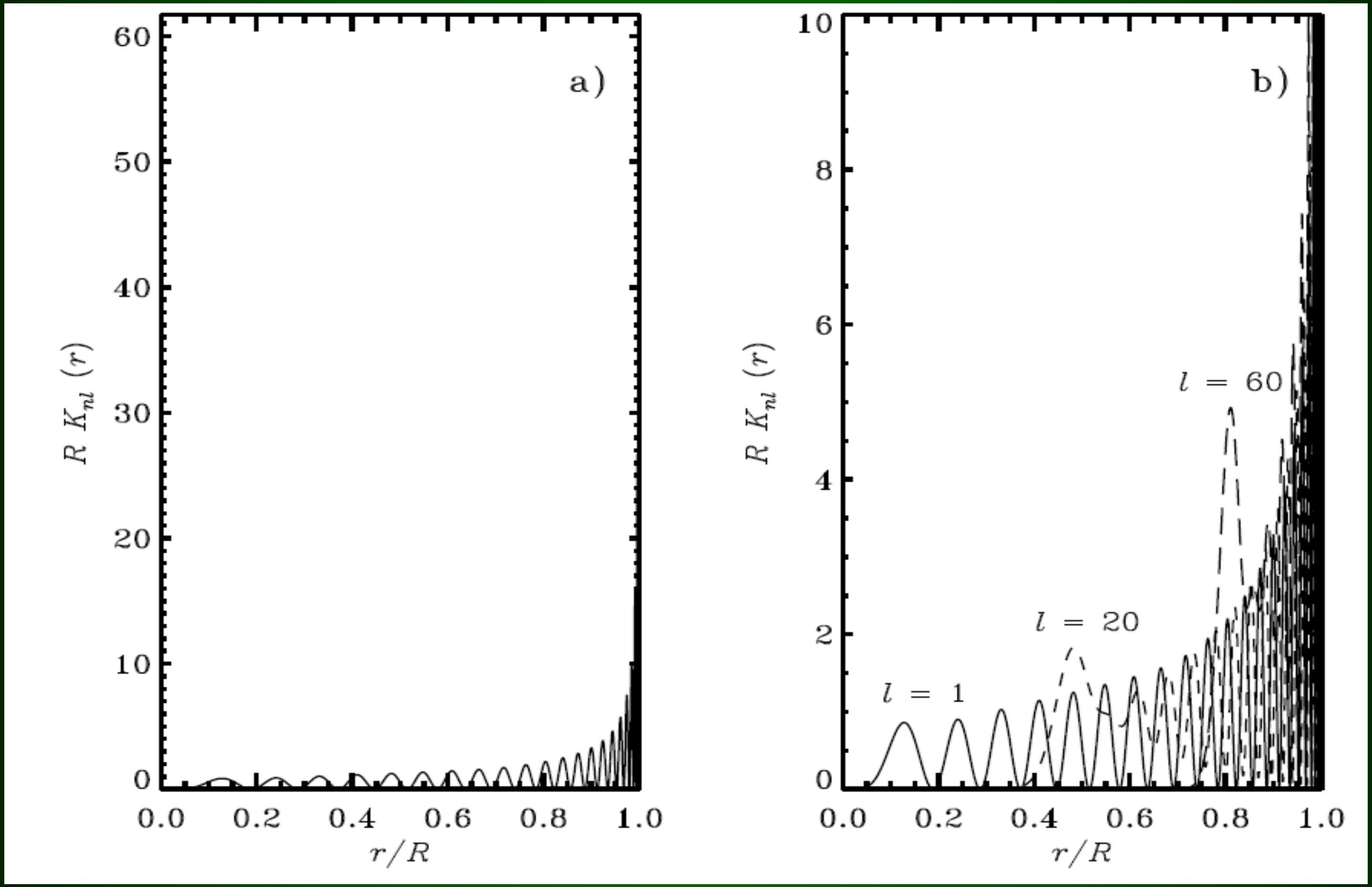
$$\beta_{nl} = \frac{\int_0^R \left(\xi_r^2 + \xi_\mathrm{h}^2 - 2L^{-1}\xi_r\xi_\mathrm{h} - L^{-2}\xi_\mathrm{h}^2\right) r^2\rho\mathrm{d}r}{\int_0^R \left(\xi_r^2 + \xi_\mathrm{h}^2\right) r^2\rho\mathrm{d}r} \ ;$$

$$\beta_{nl} = 1 - C_{nl}$$

C_{nl} – stała Ledoux, zależy od modu pulsacji i parametrów modelu gwiazdy

$$C_{nl} = 1 - \beta_{nl} = \frac{\int_0^R \left(2\xi_r \xi_\mathrm{h} + \xi_\mathrm{h}^2\right) r^2 \rho \mathrm{d}r}{\int_0^R \left(\xi_r^2 + L^2 \xi_\mathrm{h}^2\right) r^2 \rho \mathrm{d}r}$$

Jądra całki, K_{nlm}, dla obecnego modelu Słońca.
Panel a) – mod ℓ=1, n=22, ν=3239μHz
Panel b) – mody ℓ=1, n=22, ν=3239μHz
ℓ=20, n=17, ν=3375μHz
ℓ=60, n=10, ν=3234μHz



Jądro całki jest zdefiniowane tak, że $\int K_{nl}(r)dr=1$.
Czyli dla sztywnej rotacji, $\Omega\,)=\Omega_s \neq f(r)$, otrzymujemy

$$\delta\omega_{nlm} = m(1- C_{nl})\Omega_s$$

W tym przypadku efekt rotacji jest całkowicie scharakteryzowany przez stałą Ledoux, C_{nl}.

Dla modów *p* wysokiego rzędu lub wysokiego stopnia człony ξ_r^2 i ξ_h^2 dominują i $\beta_{nl} \approx 1$, czyli $C_{nl} \approx 0$.

Rozszczepienie rotacyjne jest w przybliżeniu dane przez prędkość kątową rotacji, Ω.

**Fizycznie, zaniedbane człony w równaniu na β_{nl} wynikają z efektów siły Coriolisa.
Czyli rotacyjne rozszczepienie modów *p* jest zdominowane przez adwekcje.**

W przypadku modów *g* wysokich rzędów możemy zaniedbać ξ_r , czyli

$$\beta_{nl} \approx 1 - 1/L^2, \quad C_{nl} \approx 1/L^2$$

Rozszczepienia rotacyjne modów *g* są mniejsze niż dla modów *p*.

Np. rozszczepienie rotacyjne modów *g* wysokich rzędów o $\ell=1$ wynosi tylko połowę prędkości kątowej rotacji.

Efekty umiarkowanej rotacji

Przybliżenie powolnej rotacji jest dostateczne dla wolnorotujących gwiazd, np. Słońca. Jednak w większości przypadków jest ono niewystarczające.

Soufi, Goupil, Dziembowski, 1998, A&A 334, 911 rozwinęli formalizm perturbacyjny poprawny do $O(\Omega^3)$. Formalizm ten jest dla dowolnej rotacji $\Omega=\Omega(r)$.

Efekty rotacji drugiego rzędu:
Chlebowski, 1978, AcA 28, 441
Saio, 1981, ApJ 244, 299
Gough & Thompson, 1990, MNRAS 242, 25
Dziembowski & Goode, 1992, ApJ 294, 670

Efekty rotacji na strukturę gwiazdy

Musimy uwzględnić efekty siły odśrodkowej

$$\mathbf{f}_{\rm cen} = \Omega^2 \varpi \mathbf{a}_{\varpi}$$

ϖ - odległość od osi rotacji, a_{ϖ} - wektor jednostkowy

We współrzędnych sferycznych mamy

$$\mathbf{f}_{\rm cen} = \frac{\Omega^2}{3} \sin\theta(\sin\theta \mathbf{a}_r + \cos\theta \mathbf{a}_\theta) = \frac{\Omega^2}{3}\{(2r\mathbf{a}_r - \nabla[r^2 P_2(\cos\theta)]\}$$

Krótkie wyjaśnienie

$$\nabla p = -\rho \nabla \phi + \rho \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = r\Omega^2 \sin\theta \, \boldsymbol{e}_s$$

przyspieszenie odśrodkowe

$$\boldsymbol{e}_s = \sin\theta \, \boldsymbol{e}_r + \cos\theta \, \boldsymbol{e}_\theta$$

Wektor jednostkowy we współrzędnych walcowych

Przyspieszenie odśrodkowe możemy wrazić przez $P_0(\cos\theta)$ i $P_2(\cos\theta)$

$$\boldsymbol{F} = F_r(r)\left[1 - P_2(\cos\theta)\right] \boldsymbol{e}_r + F_\theta(r) \frac{dP_2}{d\theta} \, \boldsymbol{e}_\theta$$

$$F_r(r) = \tfrac{2}{3} r\Omega^2 \text{ and } F_\theta(r) = -\tfrac{1}{3} r\Omega^2$$

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_2(\cos\theta) = 3/2 \cos^2\theta - 1/2$$

Zakładamy rotację jednorodną

Ostatnie równanie dzieli siłę odśrodkową na dwie składowe:

- Pierwsza powoduje zmiany struktury gwiazdy w kierunku radialnym

- Druga powoduje odkształcenie od sferyczności opisane przez wielomiany Legendre'a $P_2(\cos\theta)$.

Podobna separacja jest słuszna także dla rotacji niejednorodnej

Ponieważ wymagamy dokładność do O(Ω^3), możemy traktować siłę odśrodkową jako małe zaburzenie. W tym przypadku małą wielkością jest

$$\epsilon = \left(\frac{\Omega}{\omega_{\mathrm{dyn}}}\right)^2$$

Łatwo pokazać, że

$$\left(\frac{\Omega^2 r}{g_0}\right) \leq \epsilon$$

Nierówność ta gwarantuje, że w każdym miejscu wewnątrz gwiazdy siła odśrodkowa jest dużo mniejsza niż siła grawitacji. Dlatego możemy linearyzować równania struktury gwiazdowej wokół równowagowego modelu sferycznie symetrycznego.

Z przyjętą dokładnością, dowolną wielkość fizyczną, np. ciśnienie, możemy zapisać w postaci

$$p = p_0(r) + \epsilon[\tilde{p}_0(r) + \tilde{p}_2(r) P_2(\cos\theta)]$$

Tak zapisane wielkości wstawiamy do zmodyfikowanego równania równowagi hydrostatycznej, a następnie wydzielamy wyrazy niezależne od θ i te proporcjonalne do P_2.

Jeśli założymy, że rotacja jest jednorodna, to efekty rotacji w średnim, sferycznie symetrycznym modelu uwzględniamy poprzez modyfikację równania równowagi hydrostatycznej:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r} = -(g_0 - \frac{2}{3} r \Omega^2)\rho_0}$$

Czyli sferycznie symetryczna składowa perturbacji związanych z siłą odśrodkową jest zawarta w średniej strukturze modelu.

Perturbacje te powodują zmiany w częstotliwościach modów normalnych.

Efekty rotacji na częstotliwości własne i funkcje własne

Poprawki do ω spowodowane siłą Coriolisa i nieradialną składową siły odśrodkowej możemy oszacować korzystając z zasady wariacyjnej.

Operator F zapisujemy w postaci

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \epsilon\mathcal{F}_2 \ ,$$

gdzie

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0,0} - 2i\omega\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}$$

$F_{0,0}$ zawiera sferycznie symetryczną składową zaburzenia spowodowanego siłą odśrodkową

F_0 zawiera dodatkowo efekty siły Coriolisa.

εF_2 operator zaburzeń opisujący zniekształcenia spowodowanego siłą odśrodkową. Jest proporcjonalny do P_2 i $dP_2/d\theta$.

Wektor przesunięcia, *δr*, musi teraz zawierać dodatkowe człony, ponieważ siła Coriolisa działająca na przesunięcia poloidalne generuje składowe toroidalne:

$$\delta r = \delta r_p + \delta r_t$$

Postać δr_p została podana na poprzednich wykładach, natomiast δr_t wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\rm t} = \sqrt{4\pi}\frac{\xi_{\rm t}(r)}{L}\Re\left[\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}\mathbf{a}_\theta - \frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\mathbf{a}_\phi\right)\exp(-i\omega t)\right]$$

Z definicji mamy

$$\mathrm{curl}_r\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\rm p} \equiv 0\ , \quad \delta r_{{\rm t},r} \equiv 0\ , \quad \mathrm{div}\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\rm t} \equiv 0$$

Składowe poloidalne odpowiadające sferycznym harmonikom Y_l^m generuja składowe toroidalne $\propto Y_{l\pm1}^m$

Licząc $\nabla_r \mathrm{x} \delta \mathrm{r}_p$ otrzymujemy formułę na $\xi_{t,l\pm1}$ z dokładnością do $O(\Omega^2)$, która wyraża się przez $\xi_{r,l}$ i $\xi_{h,l}$

Częstotliwość modów toroidalnych w przypadku rotacji sztywnej

$$\omega_t = m\Omega - 2\, m\Omega/[l(l+1)]$$

Z formuły wariacyjnej szacujemy poprawki do częstotliwości związane z niesferycznymi efektami siły odśrodkowej oraz efektem składowych toroidalnych:

$$\delta\omega = \delta\omega_t + \delta\omega_d + O(\Omega^4),$$

$$\delta_{\mathrm{t}}\omega = \frac{1}{I}\int \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\mathrm{t}}^{*} \cdot \left(\frac{\omega}{2}\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\mathrm{t}}\right)\rho \mathrm{d}V$$

$$\delta_{\mathrm{d}}\omega = \frac{\epsilon}{2\omega I}\int \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\mathrm{p}}^{*} \cdot \mathcal{F}_2(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\mathrm{p}})\rho \mathrm{d}V \ ,$$

$$I = \int |\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_{\mathrm{p}}|^2 \rho \mathrm{d}V \ .$$

Z zasady wariacyjnej otrzymujemy wyrażenie trzeciego rzędu na rotacyjne rozszczepienie częstotliwości

$$\nu_m = \nu_0 + m(1 - C_{n\ell})\frac{\Omega}{2\pi} + \frac{\Omega^2}{2\pi\,\nu_0}(D_0 + m^2 D_1) + m\frac{\Omega^3}{\nu_0^2}T$$

ν_0 zawiera uśrednione horyzontalnie efekt siły odśrodkowej w modelu równowagowym

W obliczeniach ewolucyjnych zazwyczaj zakłada się sztywną rotację oraz zachowanie całkowitego momentu pędu w czasie ewolucji na ciągu głównym.

Współczynniki D_0, D_1, T są odpowiednio poprawkami drugiego i trzeciego rzędu otrzymane metodą zaburzeń. Uwzględniają niesferycznie symetryczne odkształcenia spowodowane siłą odśrodkowa i efektami drugiego i trzeciego rzędu siły Coriolisa.

Człony kwadratowe burzą symetrię multipletów oraz powodują przesuniecie w częstotliwości dla modów radialnych i nieradialnych modów strefowych, m=0.

Formuła nie zawiera efektu sprzężenia modów. Sprzęgają się mody, których stopień sferycznej harmoniki różni się o 2, a rząd azymutalny jest ten sam, $\ell_1=\ell_2 \pm 2$, $m_1= m_2$.

Efekty sprzężenia zaczynają odgrywać role, kiedy odległość miedzy częstotliwościami pulsacji staje się porównywalna z częstotliwością rotacji, $|\omega_1-\omega_2|\approx\Omega$.

ROTACYJNE SPRZĘŻENIE MODÓW

Rotacyjne sprzężenie modów jest jednym z głównych efektów umiarkowanej rotacji, $\Omega/\omega << 1$. Występuje , gdy

$$\boxed{\omega_j - \omega_k \sim \Omega \quad \ell_j = \ell_k \pm 2 \quad m_j = m_k}$$

Funkcje własne danego modu są superpozycją modów spełniających powyższy warunek

$$\boxed{\vec{\xi} = \sum_k a_k \vec{\xi}_{0k}}$$

a_k - wkład modu k

Współczynniki te dotrzymujemy z liniowej teorii perturbacyjnej

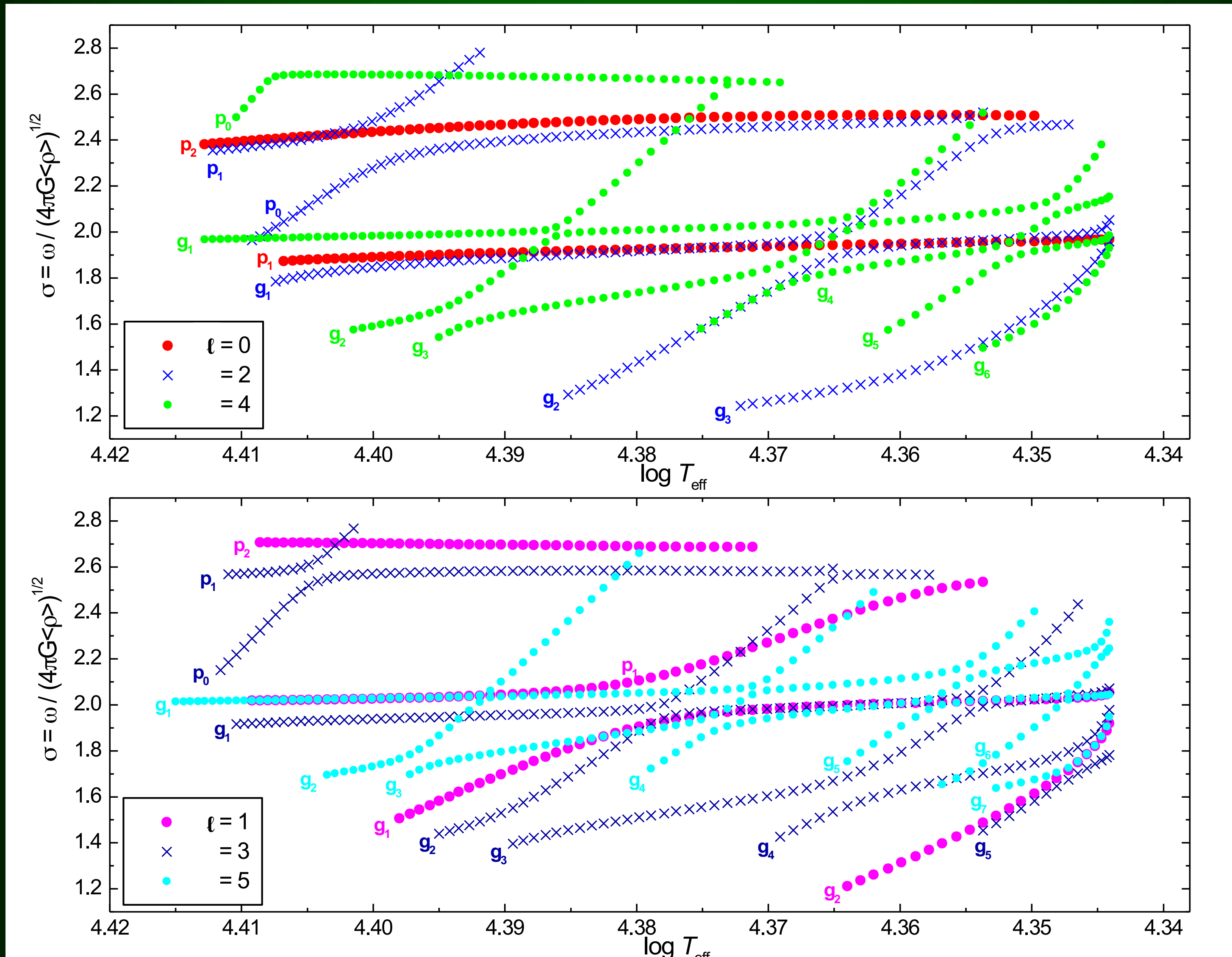
Soufi, Goupil, Dziembowski, 1998, A&A 334, 911
Daszynska-Daszkiewicz J., Dziembowski W. A., Pamyatnykh A.A., Goupil M-J., 2002, A&A 392, 151

Wartości współczynników a_k zależą od:

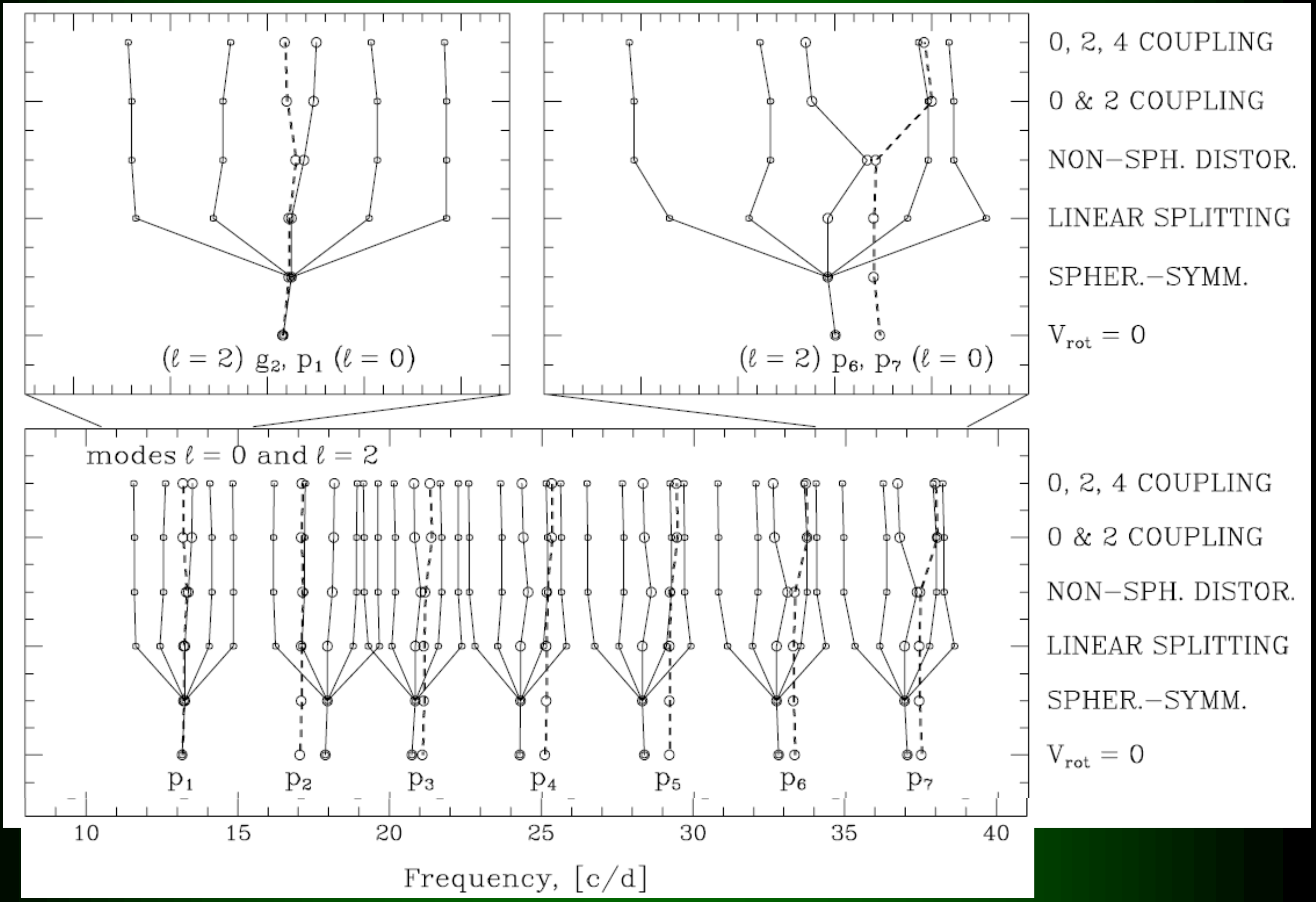
- **prędkości rotacji**
- **różnicy częstotliwości**
- **właściwości modów (inercji)**

Mody akustyczne sprzęgają się silniej niż grawitacyjne, ponieważ maja mniejsze wartości inercji (są „lżejsze”).

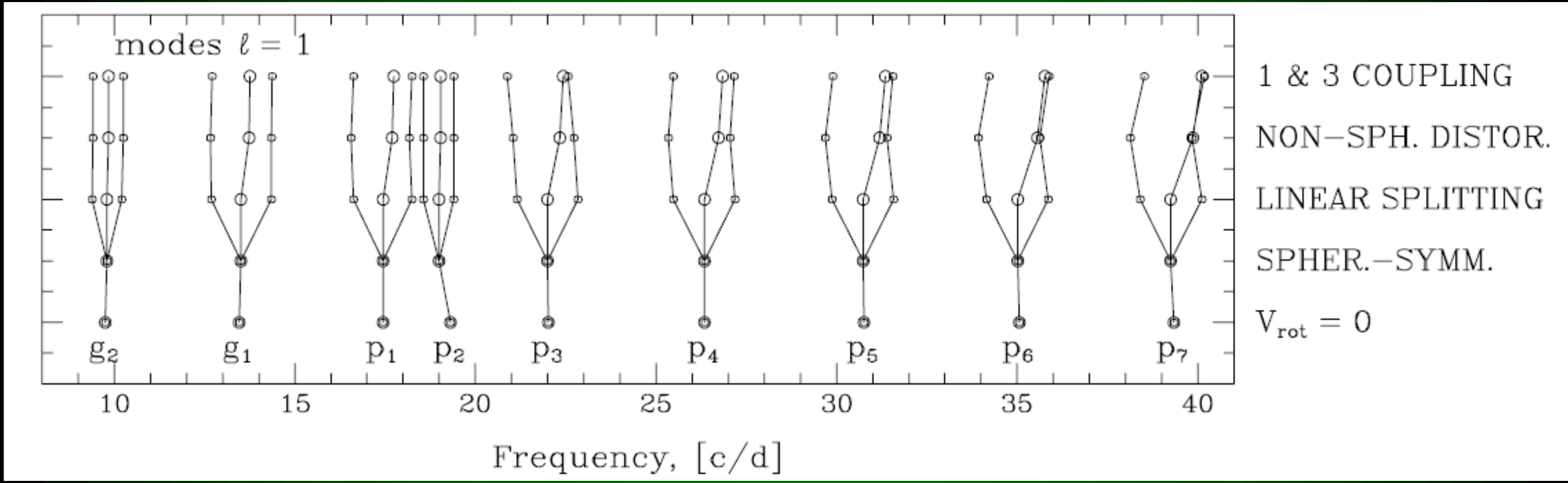
Bliskie częstotliwości w modelach β Cep o masie 12 M☉



Wkład kolejnych efektów rotacji do częstotliwości modów *p*, ℓ=0 i ℓ=2, dla modelu o parametrach: M=1.8 $M_\odot$, $T_{\rm eff}$=7515 K, $V_{\rm rot}$=92 km/s.



Wkład kolejnych efektów rotacji do częstotliwości modów ℓ=1, dla modelu o parametrach: M=1.8 $M_{\odot}$, T_{eff}=7515 K, V_{rot}=92 km/s.



Mody sprzężone oznaczamy przez ℓ’ i numerujemy stosując zasadę „avoided crossing”.

Zazwyczaj ℓ′ oznacza mod o największej amplitudzie powierzchniowej.

Mody g w gwiazdach rotujących

Dla gwiazd SPB często mamy $\omega \sim \Omega$. Wówczas nie możemy stosować formalizmu perturbacyjnego.

Przybliżenie tradycyjne

Zaniedbujemy horyzontalną składową siły Coriolisa związaną z ruchem radialnym oraz składową radialną siły Coriolisa związaną z ruchem horyzontalnym

Dobre dla modów o niskich częstotliwościach, w przypadku których ruch horyzontalny dominuje pulsację.

Założenia

- $\omega \sim \Omega << N(r)$

$$N^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right)$$

- $(\Omega / \Omega_{crit})^2 << 1$

- przybliżenie Cowlinga

Wówczas możliwa jest separacja zależności kątowych i radialnych w funkcjach własnych

s= 2Ω/ω $\quad$ **$\ell(\ell+1) \rightarrow \lambda(s)$** $\quad$ **$Y_l^m(\theta,\varphi) \rightarrow \Theta_\lambda(\cos\theta)e^{im\varphi}$**

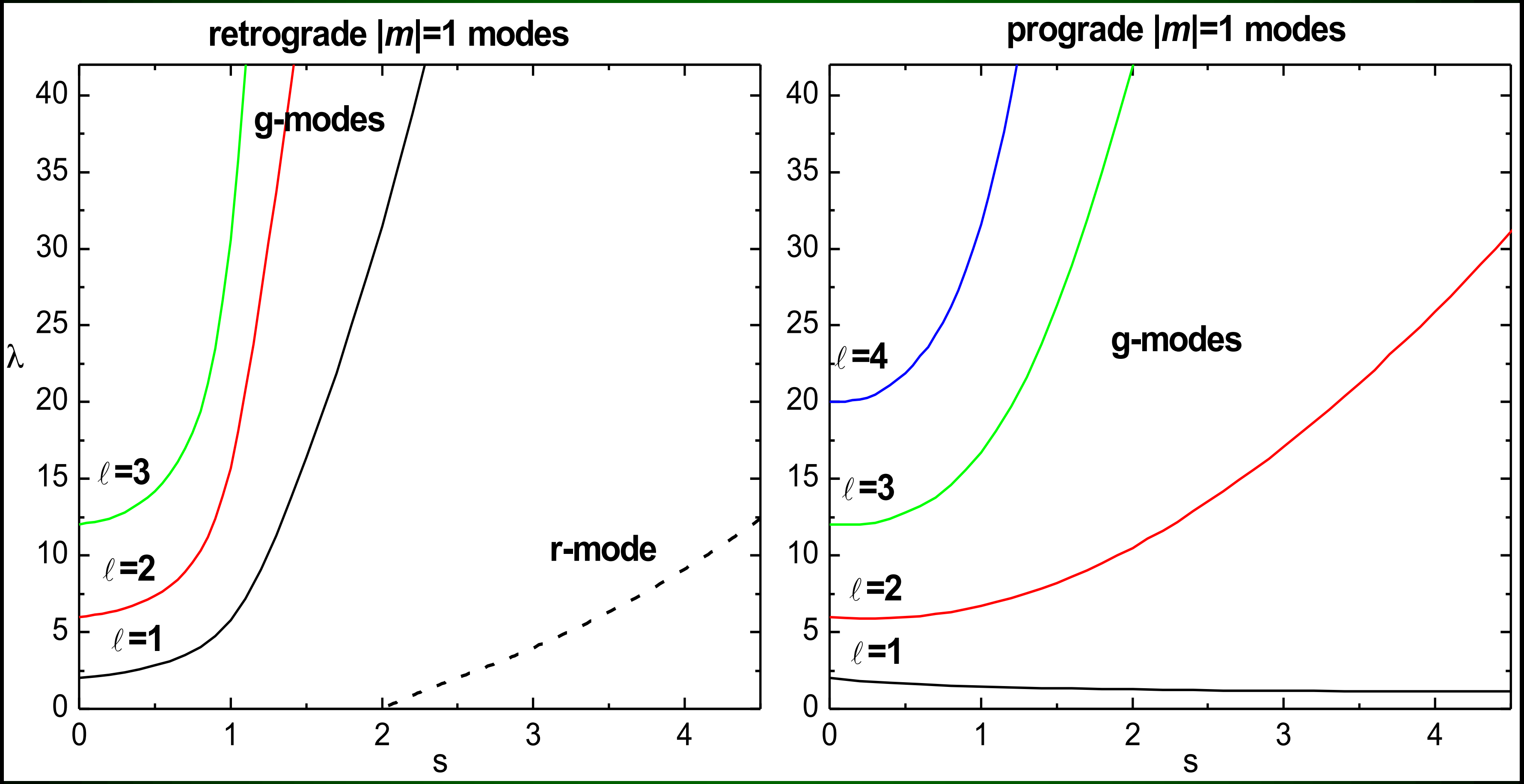
$\Theta_\lambda(\cos\theta)$ – funkcje Hougha

Mody z $\lambda>0$ propagują się w obszarze promienistym ($N>0$). Radialna liczba falowa

$$k_r \approx \frac{\sqrt{\lambda}}{r}\frac{N}{\omega}$$

Definicja stopnia modu, ℓ

$s = 2\Omega/\omega \rightarrow 0$ to $\lambda \rightarrow \ell(\ell+1)$



Mody r, zwane też ”mixed gravito-Rossbymodes” pojawiają się, gdy przy dużych prędkościach rotacji. Są to mody przeciwbieżne (m=-l)

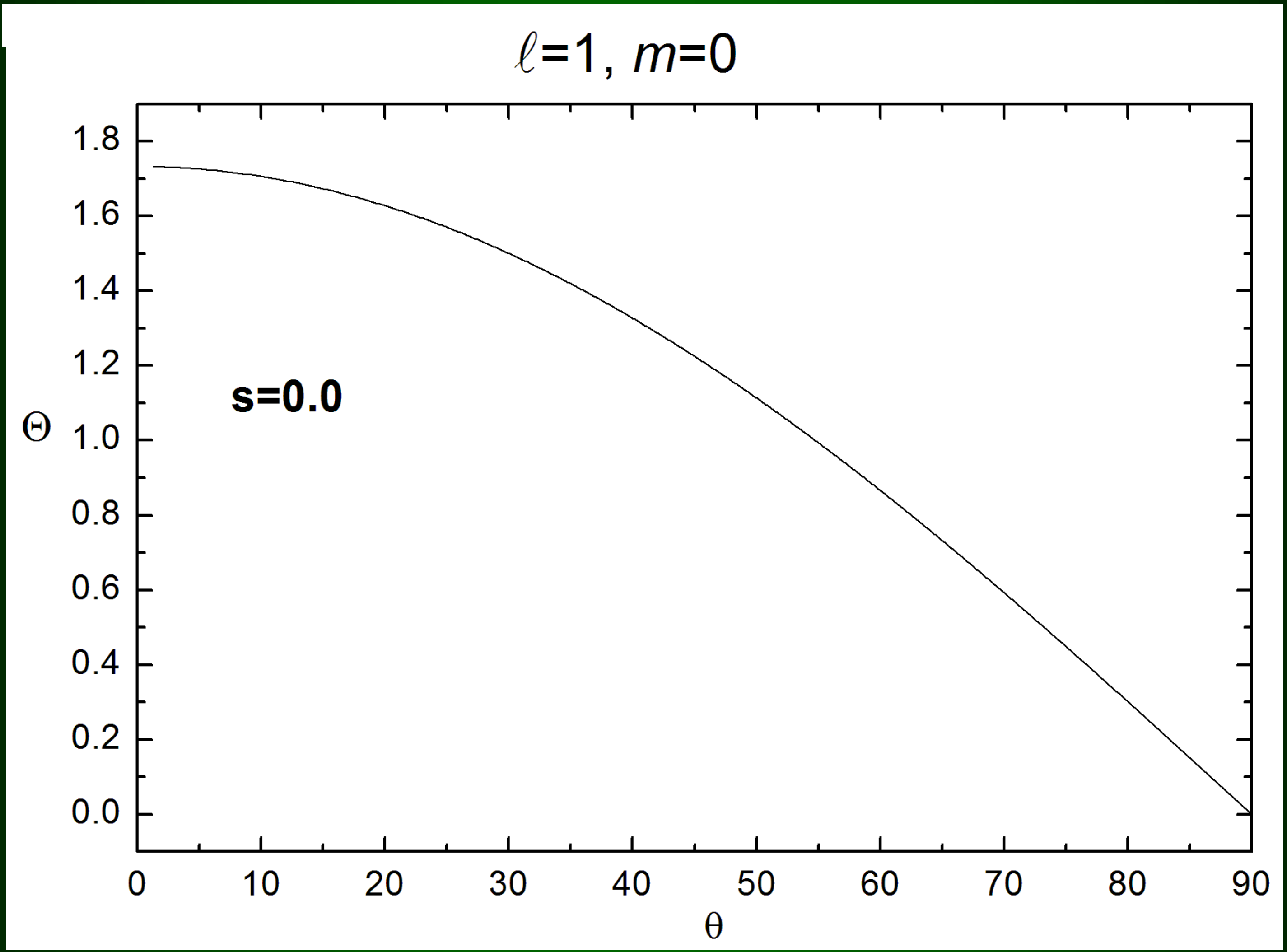
Równanie pływowe Laplace's

$$\tilde{\Theta} = -m\Theta + s\mu\hat{\Theta}$$

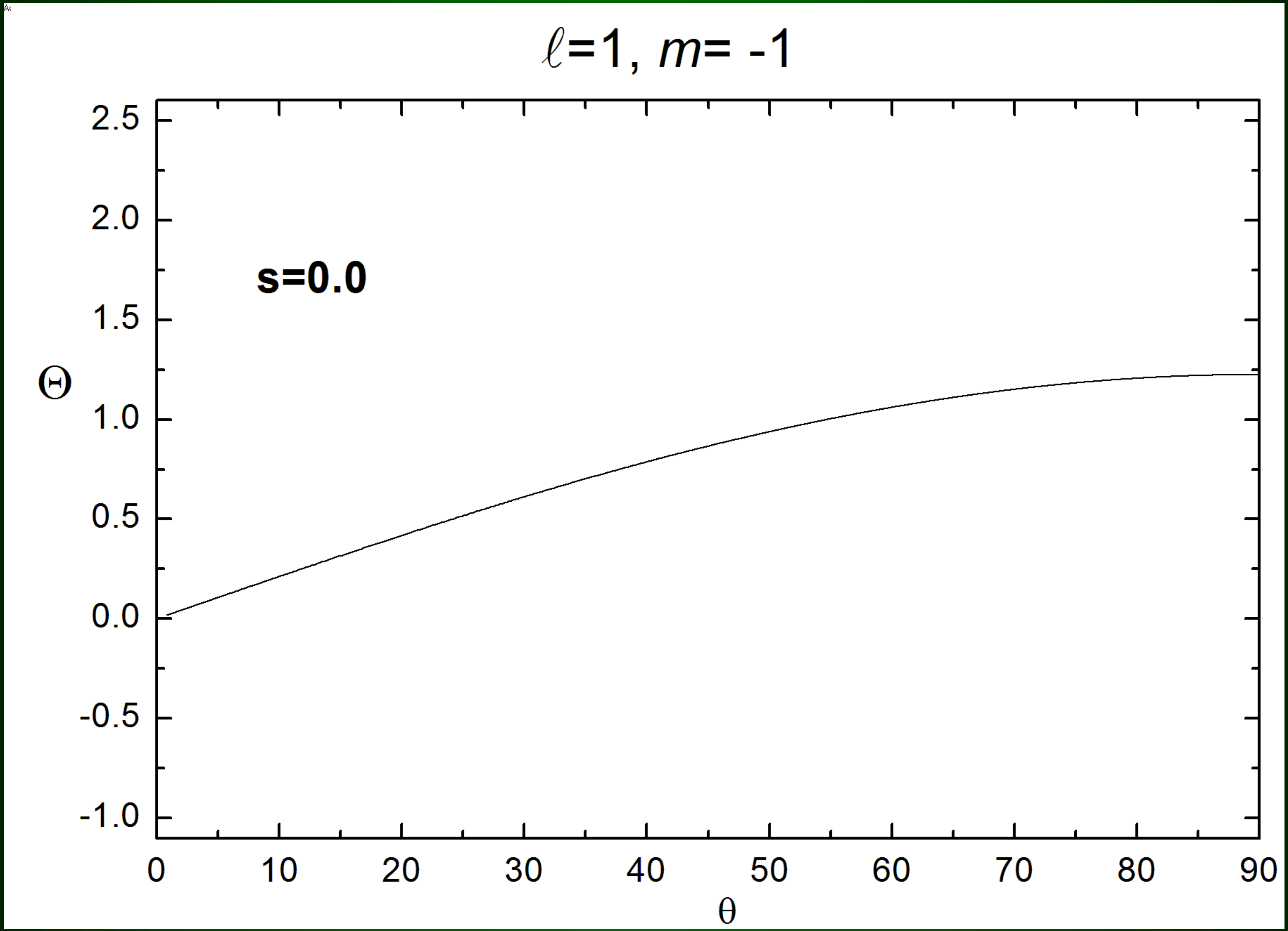
$$(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu} = -ms\mu\Theta + (s^2\mu^2 - 1)\hat{\Theta}$$

$$(1-\mu^2)\frac{d\hat{\Theta}}{d\mu} = [\lambda(1-\mu^2) - m^2]\Theta + ms\mu\hat{\Theta},$$

$$\Theta(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{\ell_j}^m(s) P_{\ell_j}^m(\theta)$$



ℓ=1, m=0
s=0.0
Θ
θ
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90



ℓ=1, m= -1
s=0.0
Θ
θ
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

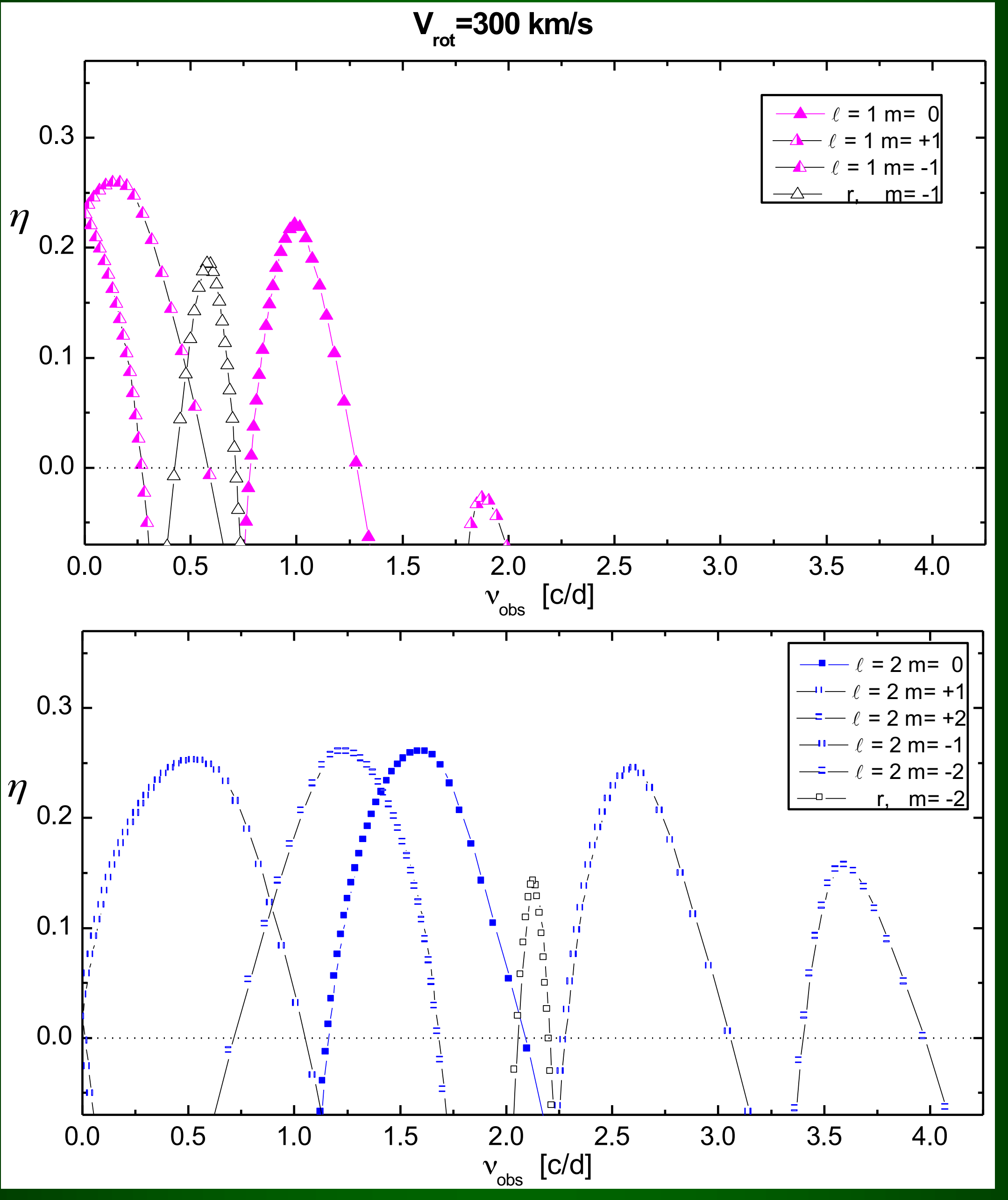
Parameter niestabilności η zależy od ω i λ/ω^2 (kształt f. własnych)

Aby mod był niestabilny:

- **$2\pi/\omega \approx \tau_{th}$ w warstwie napędzającej**

- **λ/ω^2 – definiuje zależność radialną funkcji własnych**

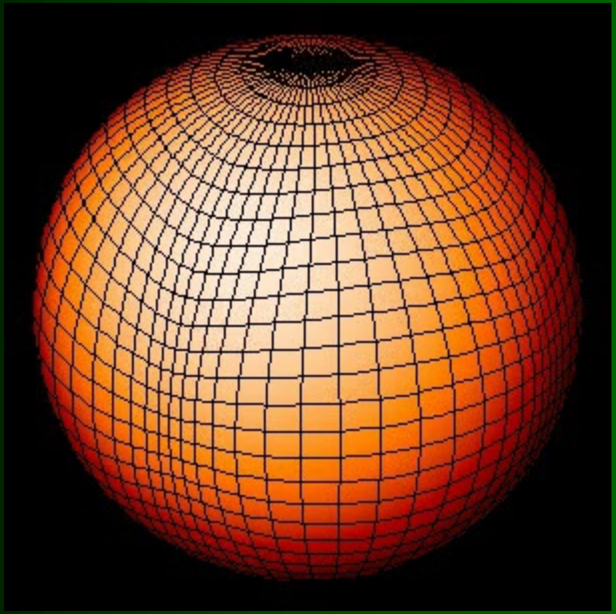
Ciśnieniowa f. własna musi mieć dużą amplitudę w warstwie napędzającej.



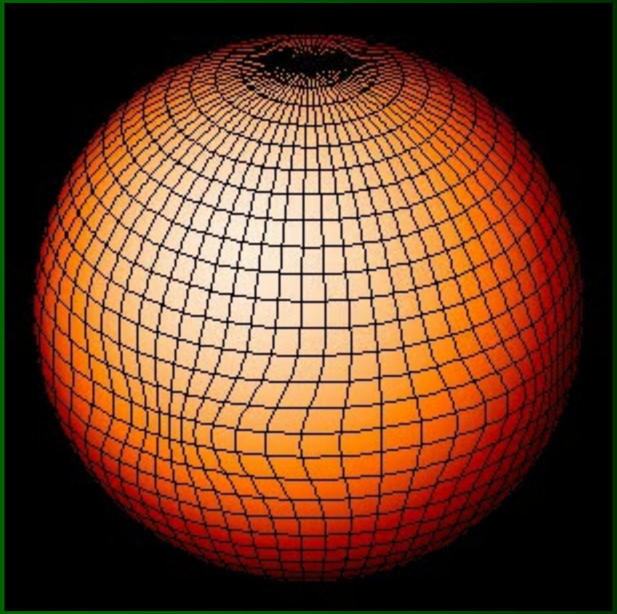
V_rot=300 km/s
η
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0
ν_obs [c/d]
ℓ = 1 m= 0
ℓ = 1 m= +1
ℓ = 1 m= -1
r, m= -1
ℓ = 2 m= 0
ℓ = 2 m= +1
ℓ = 2 m= +2
ℓ = 2 m= -1
ℓ = 2 m= -2
r, m= -2

mod g , ℓ =4, m=+4

bez rotacji

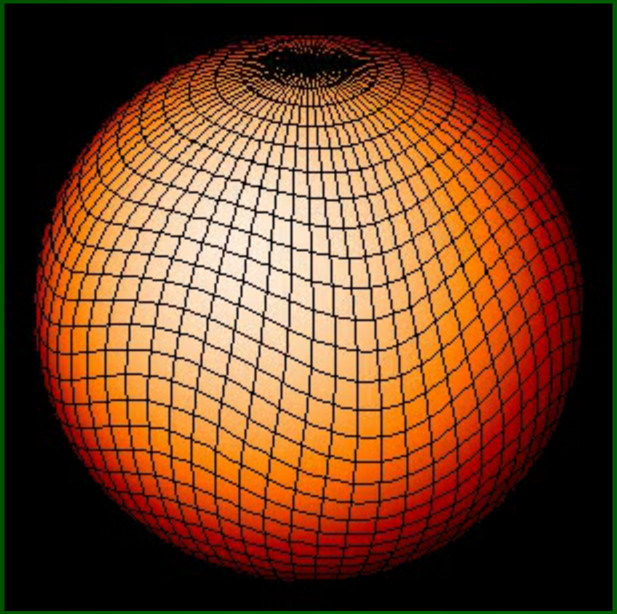


z rotacją



R. Townsend

mod r, m=-4



R. Townsend

- $$\xi_r = \varepsilon R \Theta Z$$ $Z = \exp\,[\mathrm{i}\,(m\varphi - \omega t)]$
- $$\delta \mathbf{n}_s = -\varepsilon \nabla_H (\Theta Z) = -\varepsilon \left(0,\ \frac{\partial \Theta}{\partial \theta},\ \frac{\mathrm{i} m \Theta}{\sin\theta}\right) Z.$$
- $$\frac{\delta d\mathbf{S}}{dS} = \varepsilon \left(2\Theta, -\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, -\frac{\mathrm{i} m \Theta}{\sin\theta}\right) Z,$$
- $$\frac{\delta \mathcal{F}_{\mathrm{bol}}}{\mathcal{F}_{\mathrm{bol}}} = \varepsilon f \Theta Z,$$ $f\,(\omega, \lambda/\omega^2)$
- $$\frac{\delta g}{g} = -\varepsilon \left(\frac{\omega^2 R^3}{GM} + 2\right) \Theta Z,$$

WPŁYW ROTACJI NA DIAGNOSTYCZNE

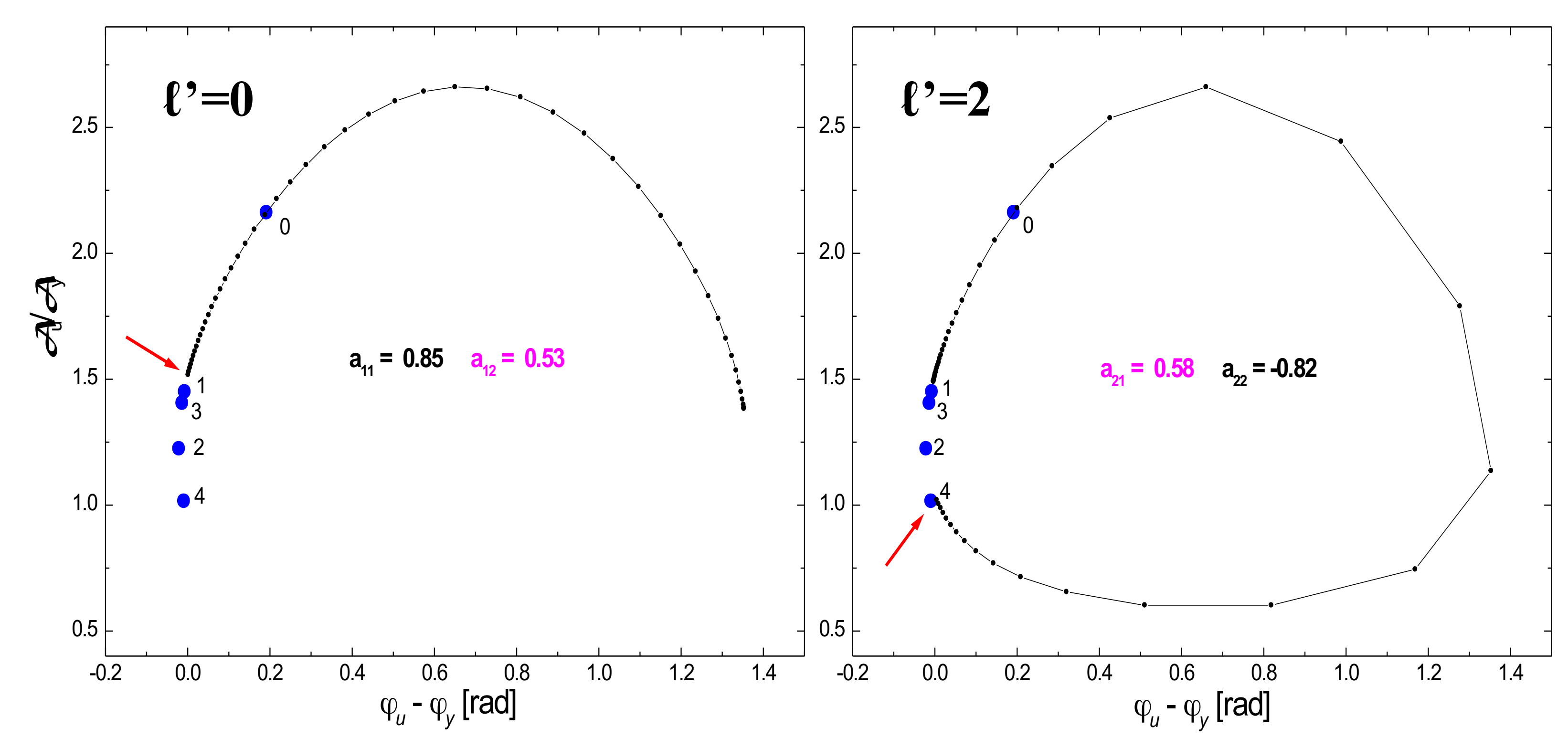
WŁASNOŚCI DIAGRAMÓW FOTOMETRYCZNYCH

Jeśli uwzględnimy efekty rotacji to fotometryczne diagramy diagnostyczne stają się zależne od kąta inklinacji, *i*, azymutalnego rzędu, *m*, oraz prędkości rotacji, $V_{\mathbf{rot}}$.

FOTOMETRYCZNA AMPLITUDA ZESPOLONA MODÓW SPRZĘŻONYCH

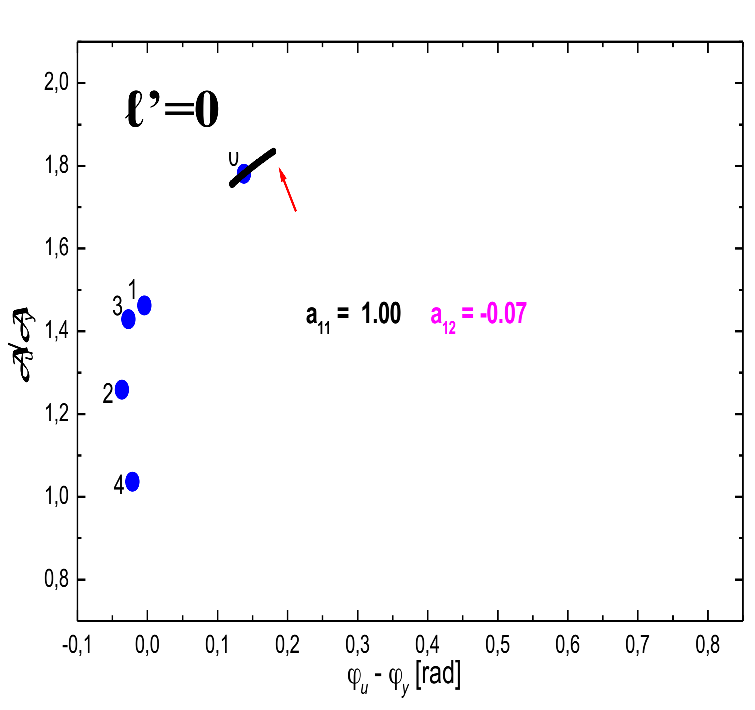
$$\boxed{\mathcal{A}_\lambda(i) = \sum_k a_k A_{\lambda,k}(i)}$$

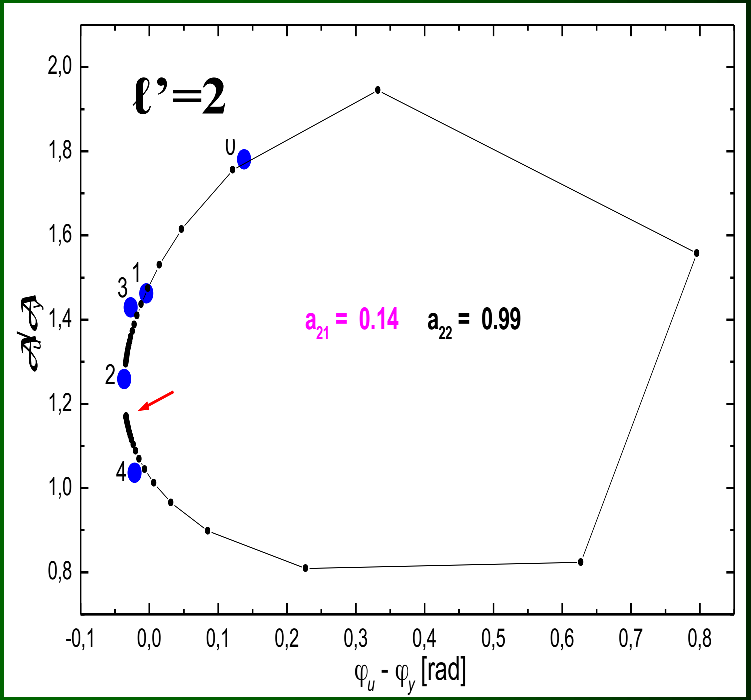
Efekt sprzężenia modów ℓ = 0, p_1 i ℓ =2, g_1 ,*m=0*, $\Delta\sigma_0$ =0.003, dla modelu log T_{eff} =4.374, V_{rot}= *100* km/s.



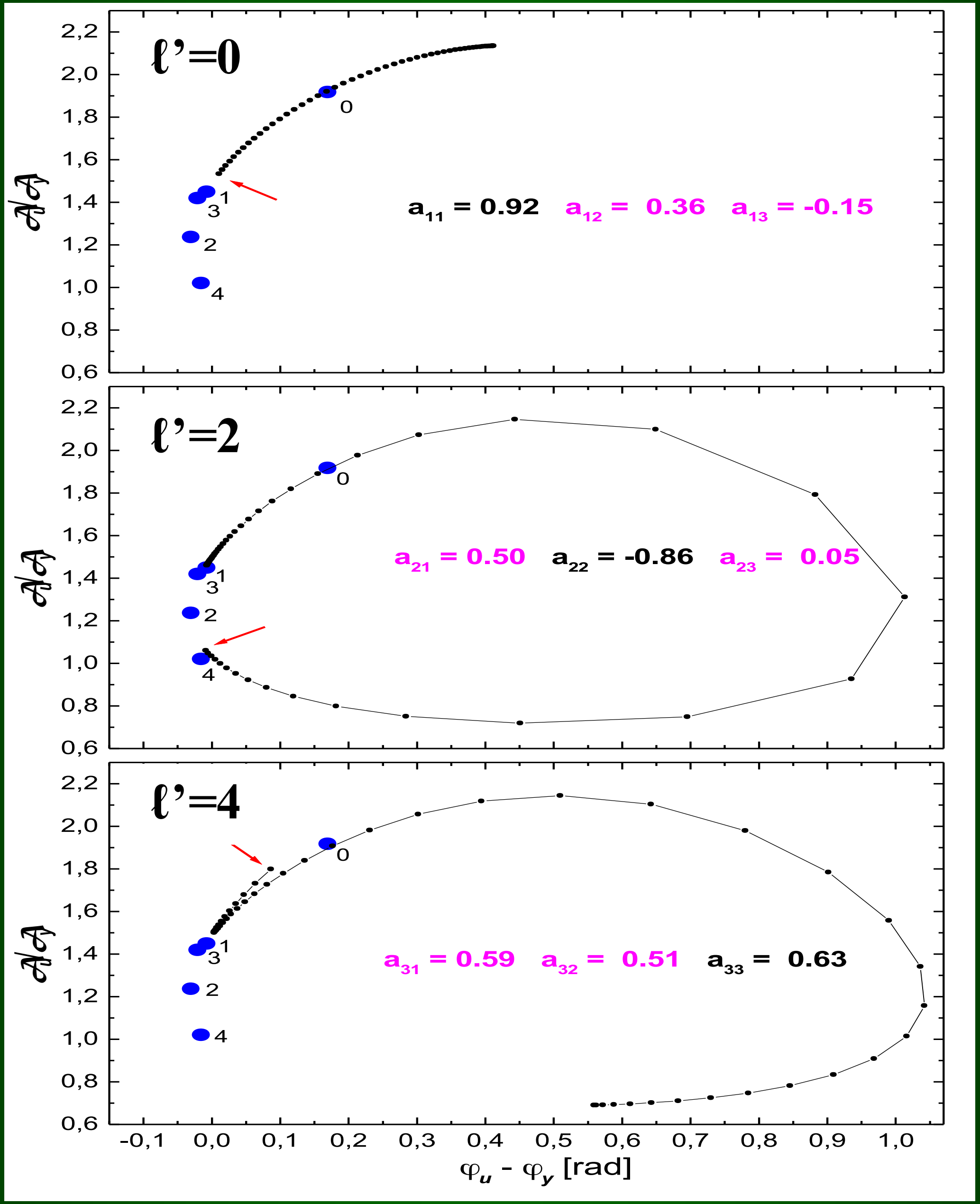
Odległość pomiędzy kolejnymi kropkami wynosi 0.02 w cos*i*. Czerwona strzałka oznacza obserwacje od bieguna gwiazdy, *i*=0°.

Efekt sprzężenia modów ℓ = 0, p_1 i ℓ =2, g_1 , *m*=0,
$\Delta\sigma_0$ =0.074 dla modelu log T_{eff} =4.406, V_{rot}= 100 km/s.





Efekt sprzężenia trzech modów ℓ = 0, p_1, ℓ =2, g_1, ℓ =4, g_2 ,m=0



Poprzez sprzężenie rotacyjne mody o wysokich stopniach, $\ell = 4$ (5), mogą uzyskać znaczącą składowa $\ell = 0$ (1).

Oznacza to, że mogą być wykrywalne za pomocą fotometrii naziemnej.

- możemy „widzieć” mody o wyższych ℓ

- pojawia się zależność od aspektu oraz od *m*

Identyfikacja modów musi być wykonana jednocześnie z wyznaczeniem parametrów gwiazdowych, rotacji i kąta inklinacji

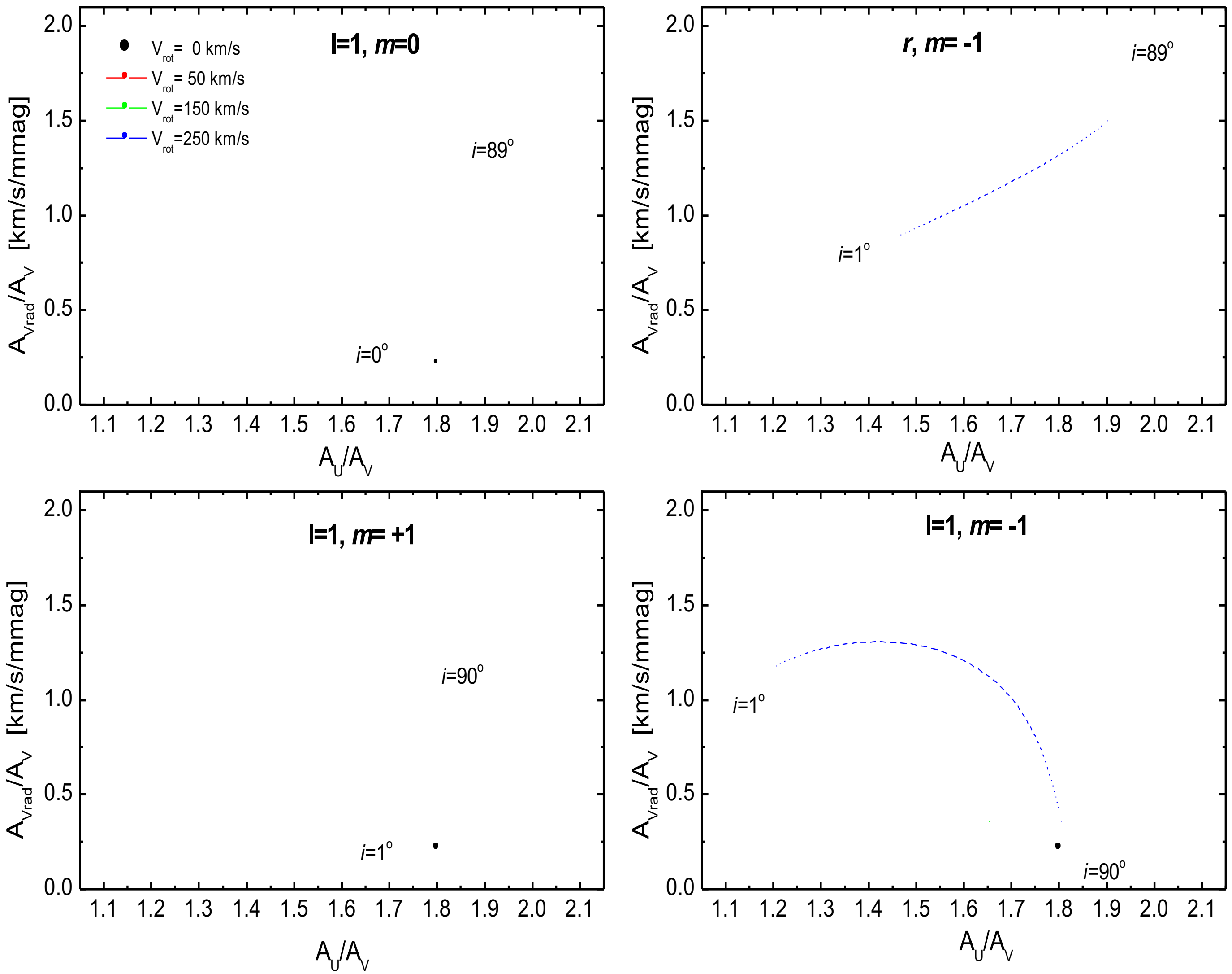
FOTOMETRYCZNA AMPLITUDA ZESPOLONE MODÓW WOLNYCH (ω~Ω)

$$\mathcal{A}_x(i) = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{\ell_j}^m(s) Y_{\ell_j}^m(i,0) \left[\mathcal{D}_{\ell_j}^x f + \mathcal{E}_{\ell_j}^x \right]$$

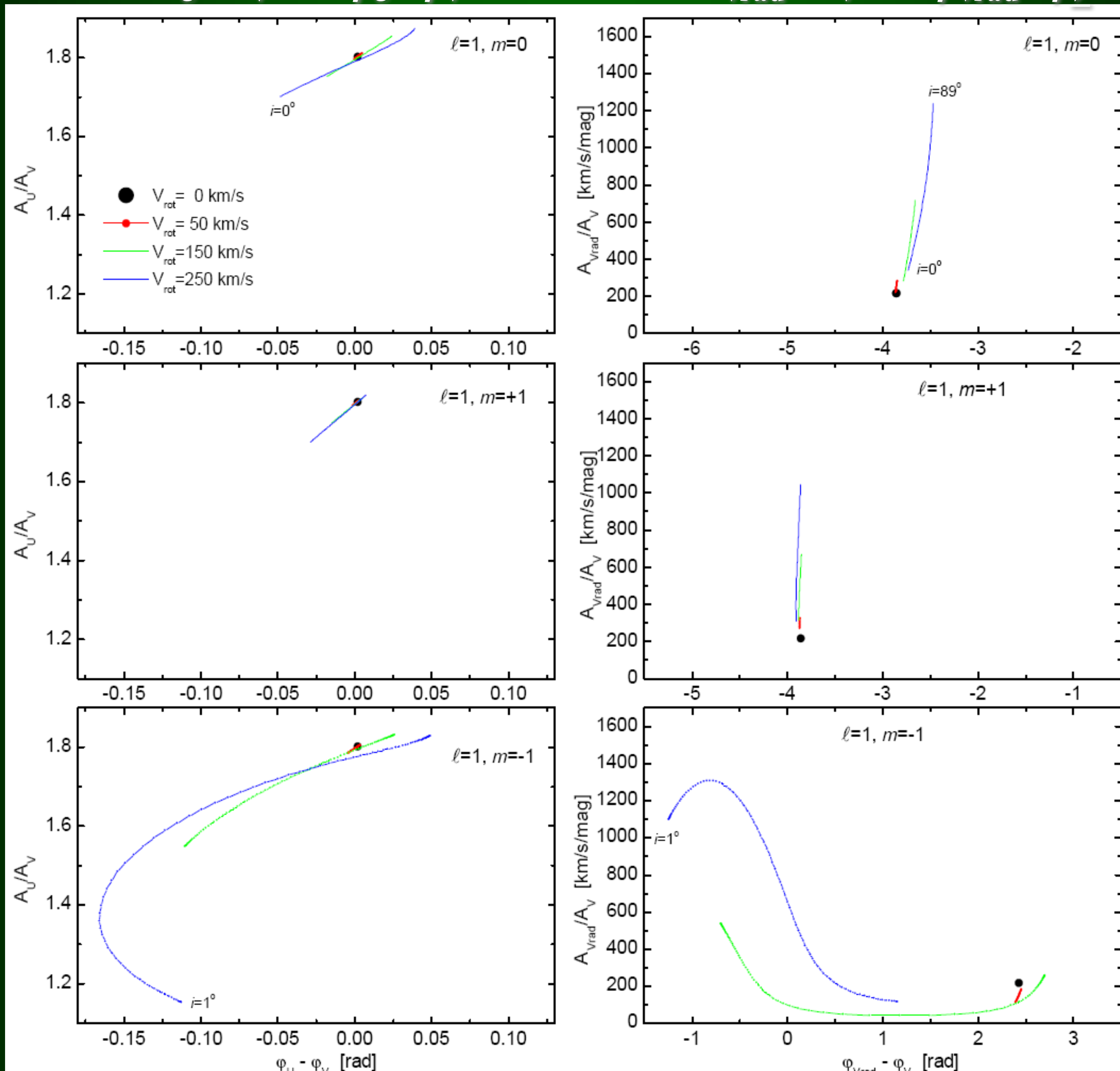
$$\ell_j = \begin{cases} |m| + 2(j-1) & \text{- mody parzyste} \\ |m| + 2(j-1) + 1 & \text{- mody nieparzyste} \end{cases}$$

$$\Theta(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{\ell_j}^m(s) P_{\ell_j}^m(\theta)$$

A_{Vrad}/A_V vs. A_U/A_V



A_U/A_V vs. $\varphi_U - \varphi_V$ A_{Vrad}/A_V vs. $\varphi_{Vrad} - \varphi_V$



Przykład:
Mody oscylacji w szybkorotującej gwieździe typu SPB μ Eridani

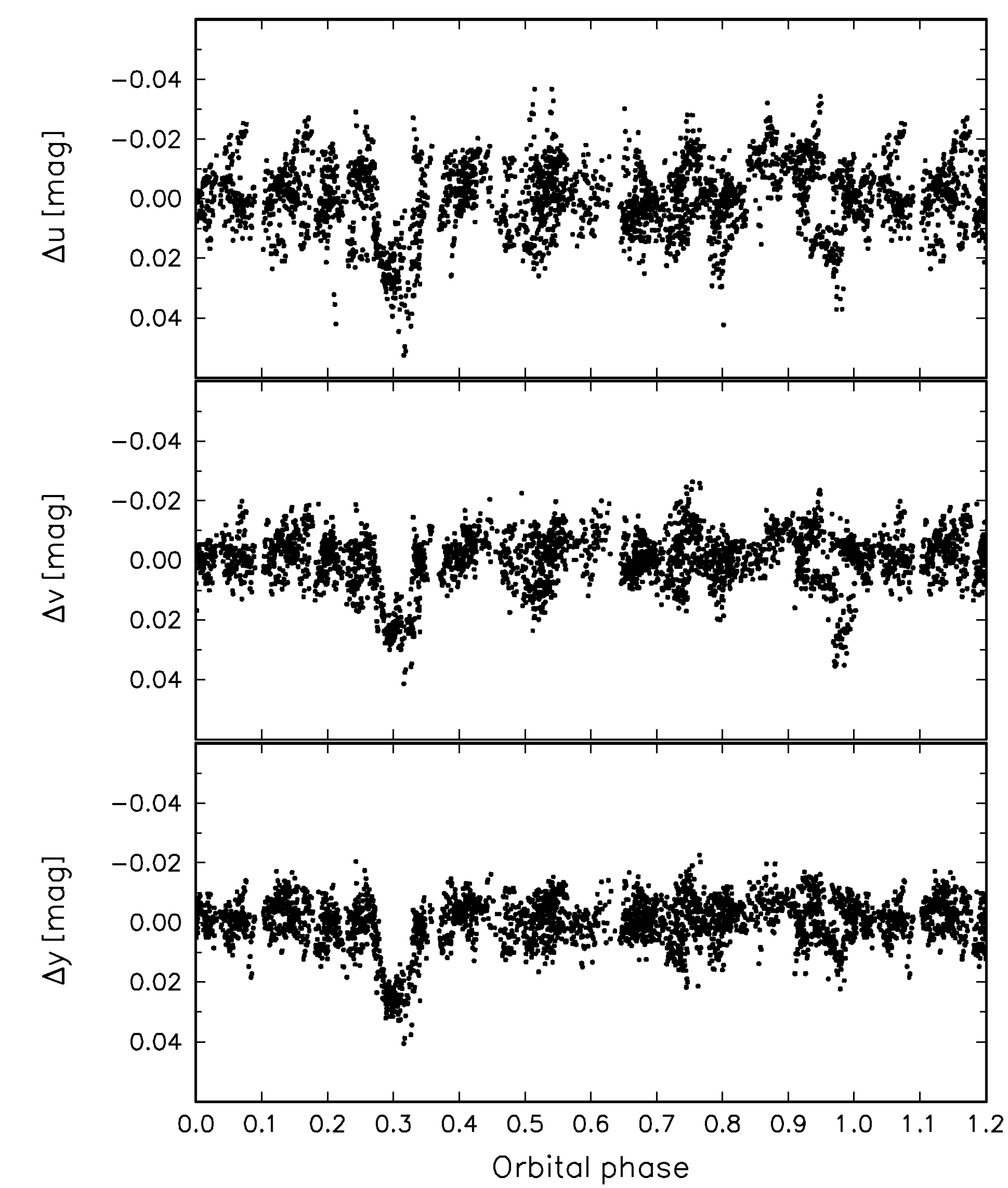
μ Eri (HD 30211), B5IV, V=4.00, π=6.13(0.19) mas

spektroskopowo podwójna SB1
P_{orb}=7.38090 d, e=0.344 (Jerzykiewicz i in. 2013)

V_{rot}sini=150-190 km/s (Bernacca & Perinotto 1970, Abt, Levato, Grosso, 2002, ApJ 573, 359)

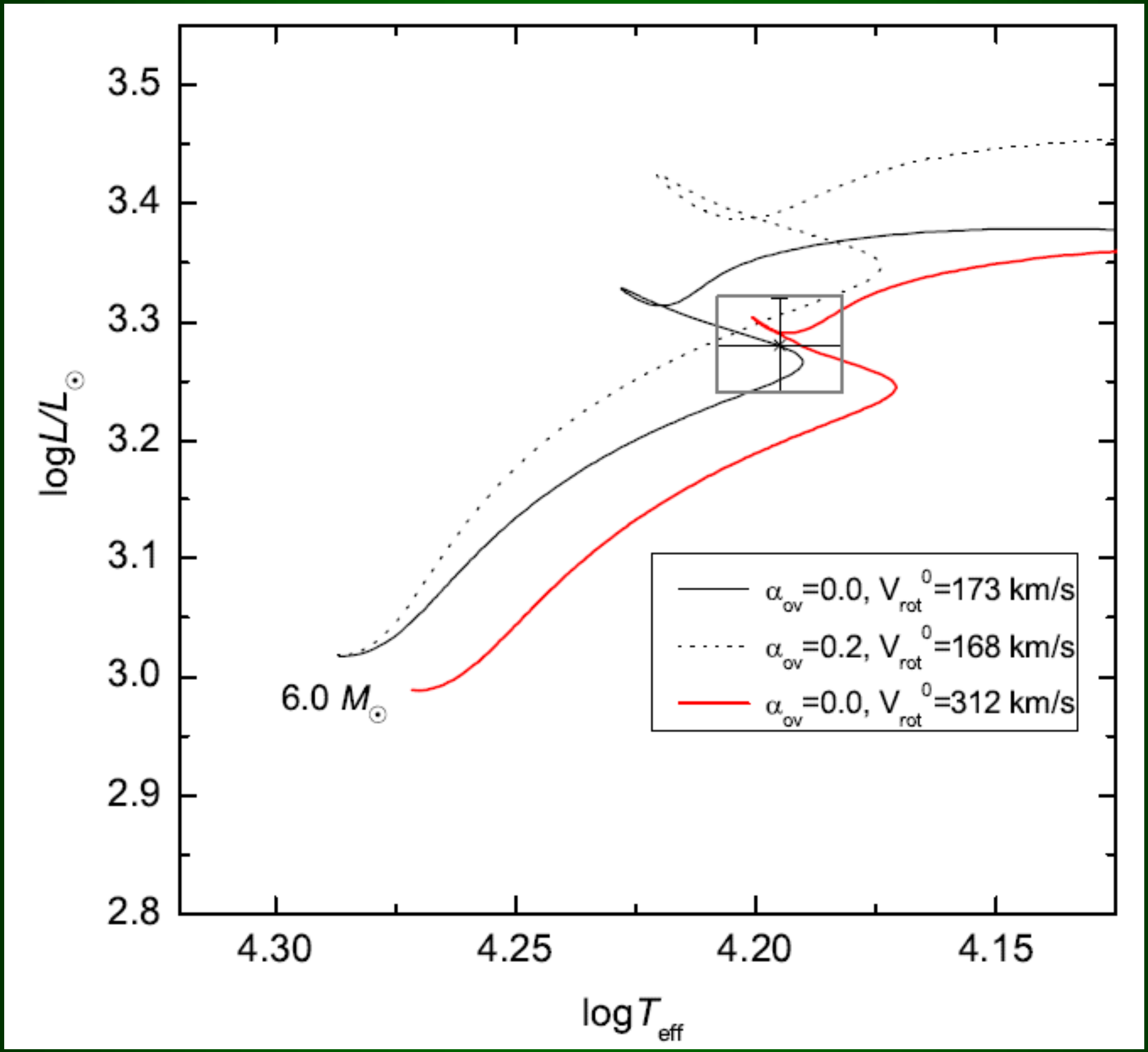
V_{rot}sini=140 km/s (Jerzykiewicz i in. 2013)

μ Eri - zmienna zaćmieniowa



Jerzykiewicz M., Handler G., Shobbrook R. R. et al., 2005, MNRAS 360, 619

log T_{eff}=4.195±0.013   logL/L_{sun}=3.280±0.040

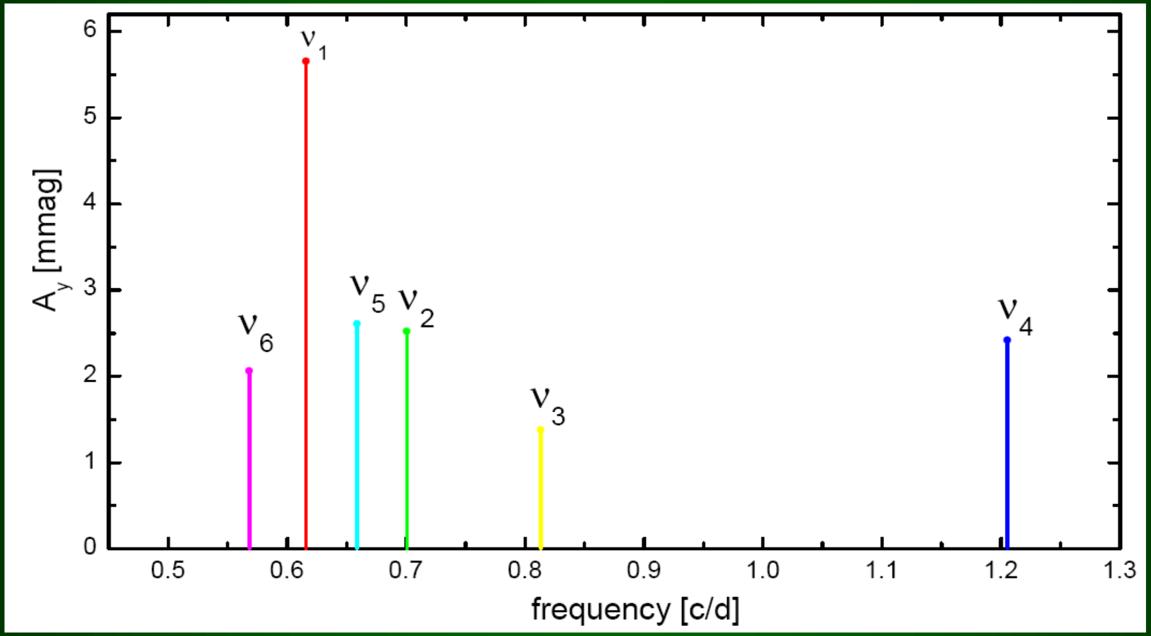


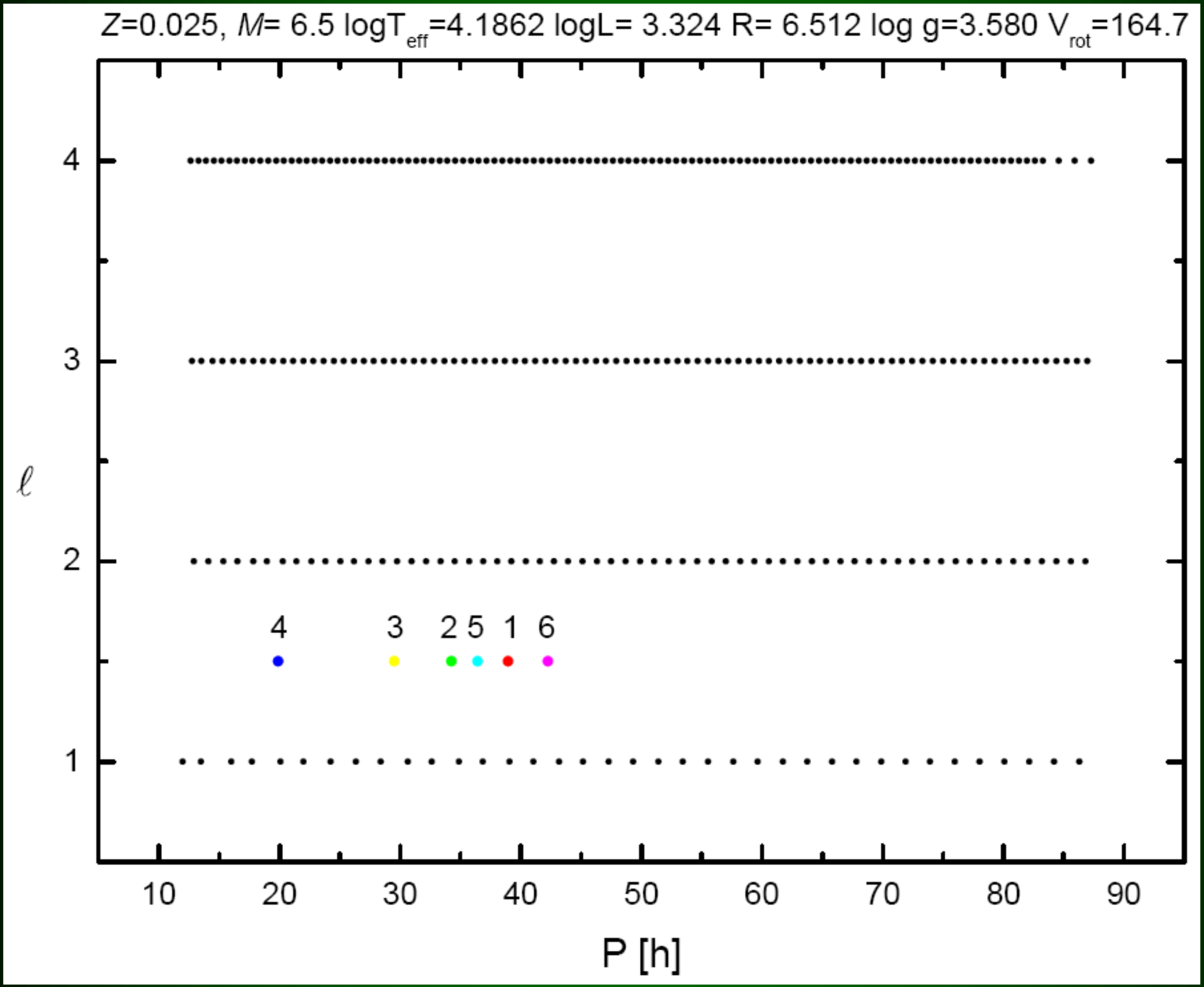
μ Eri odkryta jako gwiazda pulsująca typu SPB odpodczas kampanii fotometrycznych 2002-2004

- Handler G., Shoggrook R. R., Jerzykiewicz M. et al., 2004, MNRAS 347, 454
- Jerzykiewicz M., Handler G., Shobbrook R. R. et al., 2005, MNRAS 360, 619

6 częstotliwości oscylacji w fotometrii uvy

$\nu_1 = 0.61574$ c/d $P_1 = 1.62406$ d
$\nu_2 = 0.70075$ c/d $P_2 = 1.42703$ d
$\nu_3 = 0.81319$ c/d $P_3 = 1.22972$ d
$\nu_4 = 1.20554$ c/d $P_4 = 0.82951$ d
$\nu_5 = 0.65882$ c/d $P_5 = 1.51786$ d
$\nu_6 = 0.56799$ c/d $P_6 = 1.76059$ d





Z=0.025, M= 6.5 logT_eff=4.1862 logL= 3.324 R= 6.512 log g=3.580 V_rot=164.7
ℓ
4
3
2
1
4 3 2 5 1 6
10 20 30 40 50 60 70 80 90
P [h]

	A [mag]	φ [rad]
$\nu_1 = 0.61574$ c/d, $P_1 = 1.62406$ d		
u	0.00988(16)	5.7399(162)
v	0.00633(12)	5.7696(193)
y	0.00565(11)	5.8215(190)
$\nu_2 = 0.70075$ c/d, $P_2 = 1.42703$ d		
u	0.00485(16)	5.0448(335)
v	0.00300(12)	5.1981(405)
y	0.00252(11)	5.1465(427)
$\nu_3 = 0.81319$ c/d, $P_3 = 1.22972$ d		
u	0.00275(16)	6.0834(588)
v	0.00192(12)	6.4370(639)
y	0.00138(10)	6.8650(761)
$\nu_4 = 1.20554$ c/d, $P_4 = 0.82951$ d		
u	0.00295(16)	3.6503(561)
v	0.00255(12)	3.9222(492)
y	0.00242(10)	4.0293(454)
$\nu_5 = 0.65882$ c/d, $P_5 = 1.51786$ d		
u	0.00395(16)	3.3373(422)
v	0.00251(12)	3.3311(501)
y	0.00261(11)	3.3758(431)
$\nu_6 = 0.56799$ c/d, $P_6 = 1.76059$ d		
u	0.00271(16)	3.5029(607)
v	0.00199(12)	3.6735(628)
y	0.00206(11)	3.6731(528)

$$V_{rot} \approx 140\ km/s \quad R \approx 6\ R_{\odot} \Rightarrow \nu_{rot} \approx 0.5\ c/d$$

$$\downarrow$$

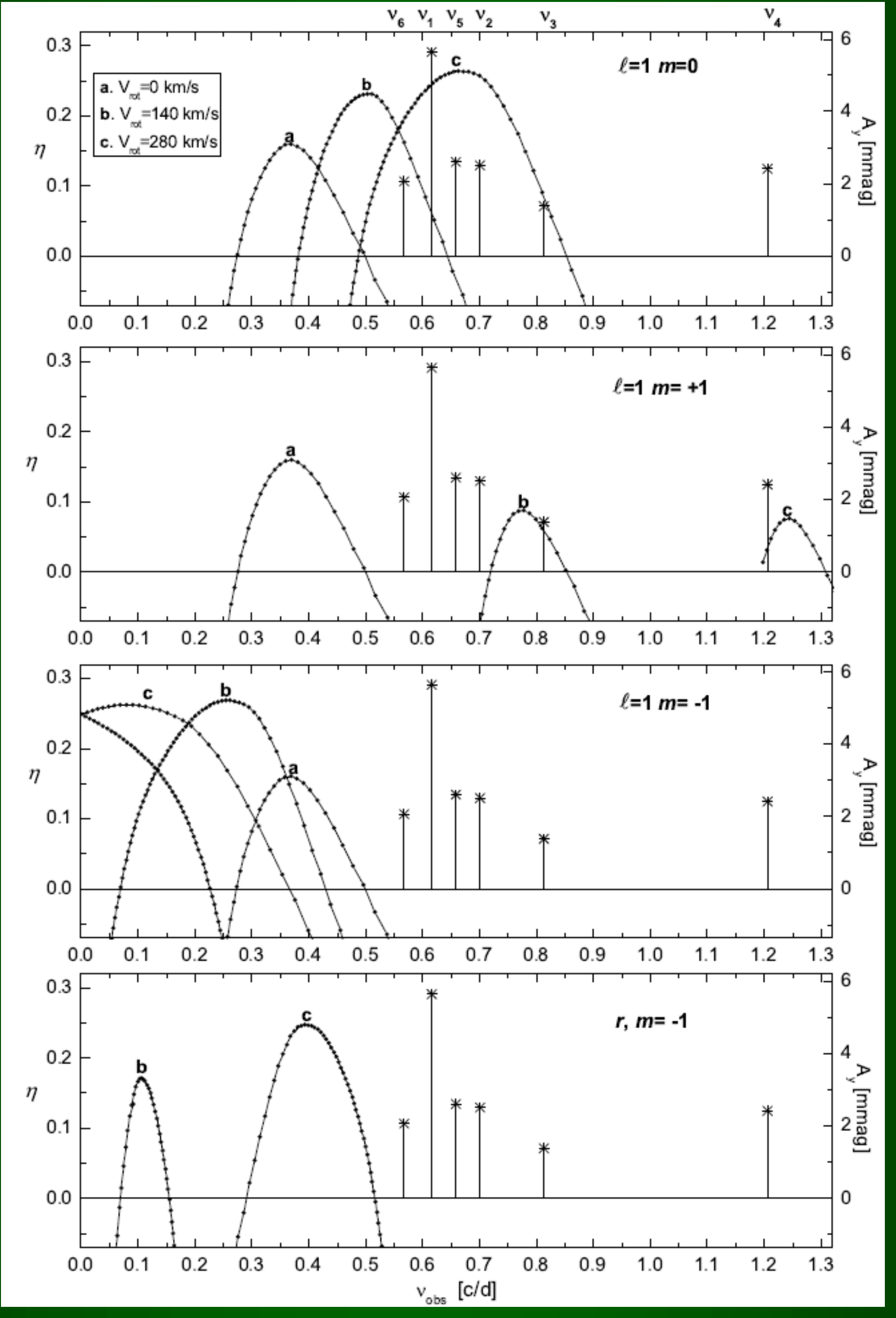
$$\boxed{\nu_{rot} \sim \nu_{puls}}$$

Model	M $[M_\odot]$	$V_{\rm rot}$ [km/s]	$\alpha_{\rm ov}$ $[H_p]$	$\log T_{\rm eff}$ [K]	$\log L$ $[L_\odot]$	$\nu_{\rm rot}$ [c/d]
1	6.0	140	0.0	4.1948	3.251	0.48
2	6.0	280	0.0	4.1957	3.197	0.96
3	6.0	140	0.2	4.1952	3.305	0.46

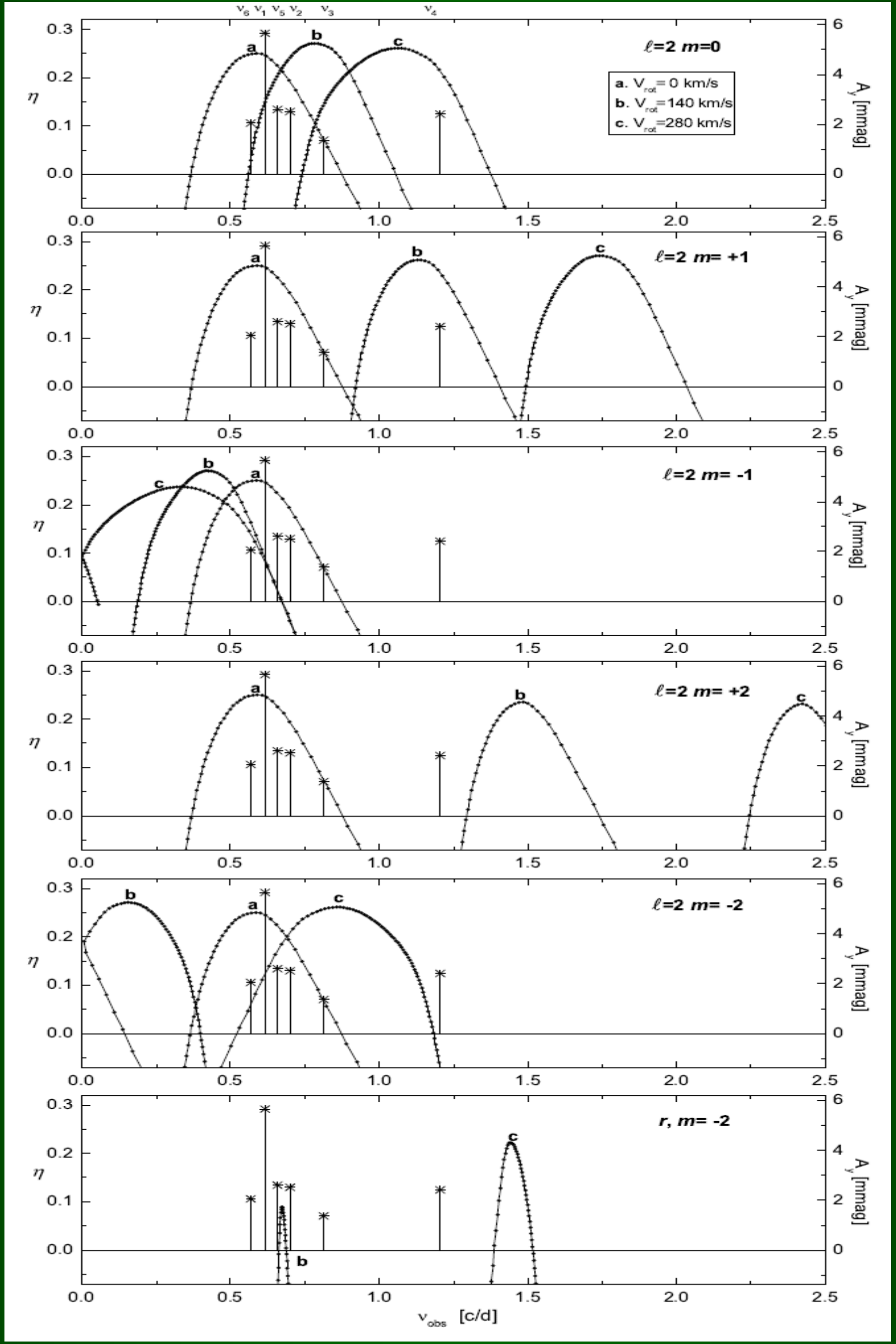
WYBÓR MODÓW:

mody g o stopniach ℓ=1- 6 oraz mody r, m= -1,-2

niestabilne przy $\nu^{teo}_{puls} \sim \nu^{obs}_{puls}$ dla każdej pary (ℓ,m), (r,m)



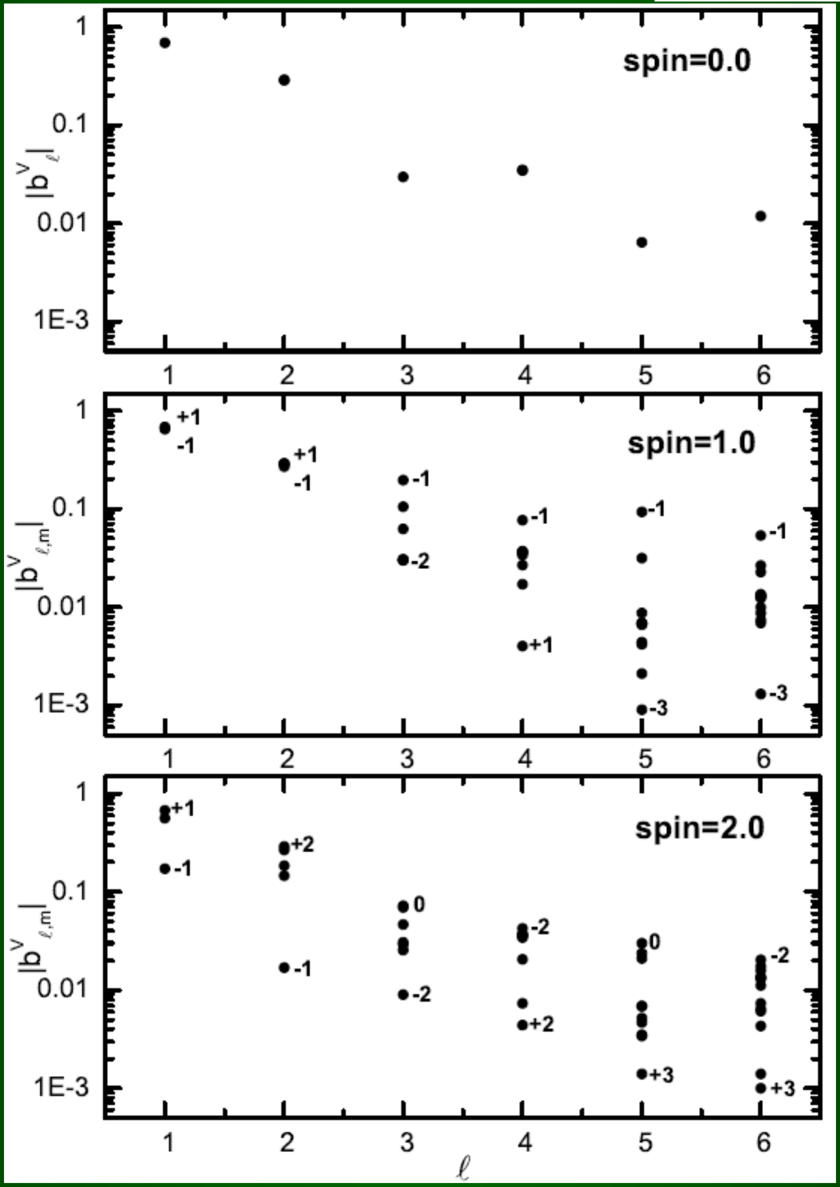
ν6 ν1 ν5 ν2 ν3 ν4
a. Vrot=0 km/s
b. Vrot=140 km/s
c. Vrot=280 km/s
ℓ=1 m=0
ℓ=1 m= +1
ℓ=1 m= -1
r, m= -1
η
Ay [mmag]
νobs [c/d]

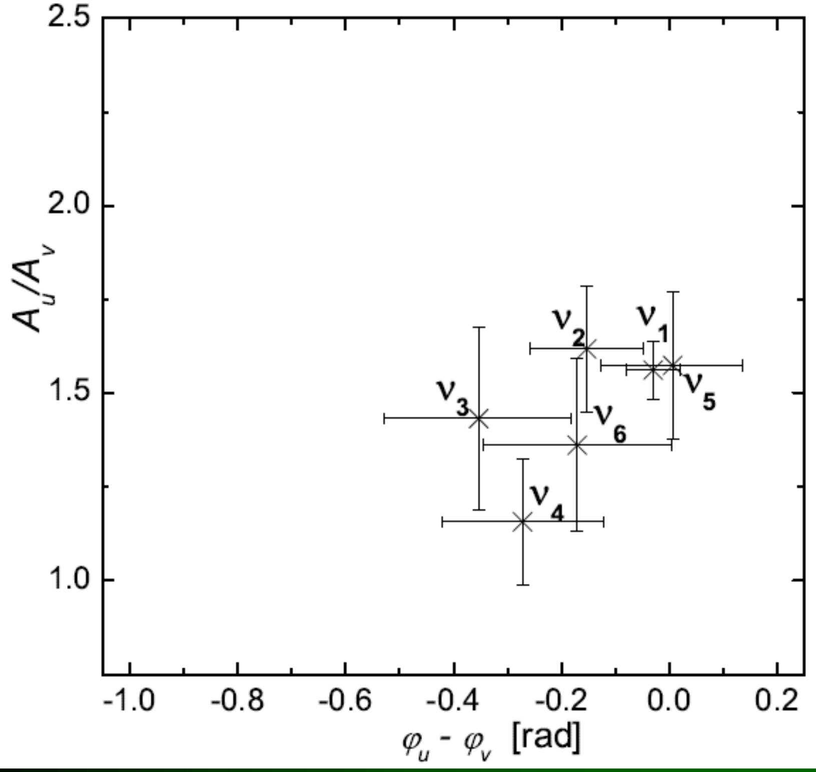


ν6 ν1 ν5 ν2 ν3 ν4
ℓ=2 m=0
a. V_rot= 0 km/s
b. V_rot=140 km/s
c. V_rot=280 km/s
ℓ=2 m= +1
ℓ=2 m= -1
ℓ=2 m= +2
ℓ=2 m= -2
r, m= -2
η
A_y [mmag]
ν_obs [c/d]

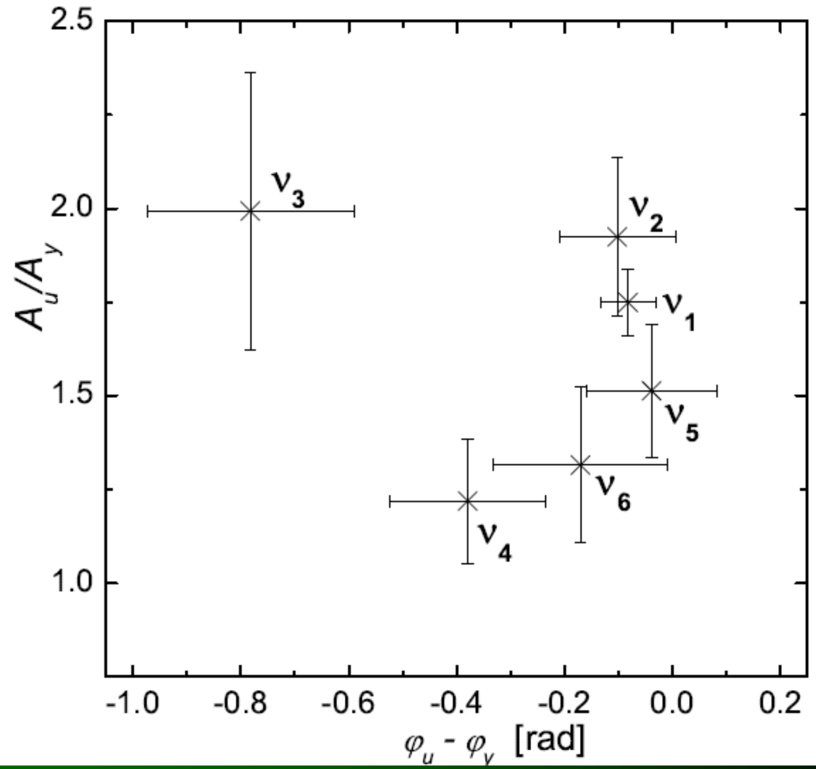
widoczność modów

$$b^{x}_{\ell,m} = \int_0^1 h^x(\mu)\mu\Theta^m_\ell(\theta)d\mu,$$





2.5
2.0
1.5
1.0
A_u/A_v
ν_1
ν_2
ν_3
ν_4
ν_5
ν_6
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
φ_u - φ_v [rad]



2.5
2.0
1.5
1.0
A_u/A_y
ν_3
ν_2
ν_1
ν_5
ν_6
ν_4
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
φ_u - φ_y [rad]

dyskryminant

$$\mathcal{A}_k = \varepsilon \mathcal{F}_k(i)$$

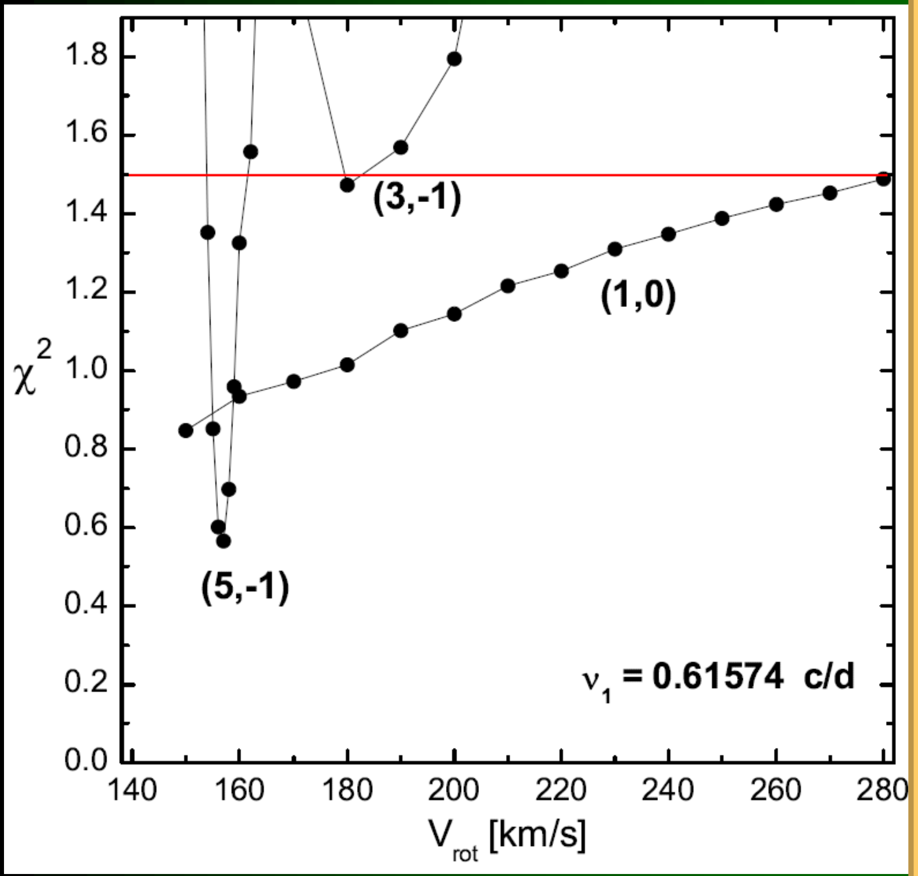
$$w_k = |\sigma_k|^{-2}.$$

$$\mathcal{F}_k(i) = \mathcal{D}^k(i) f + \mathcal{E}^k(i),$$

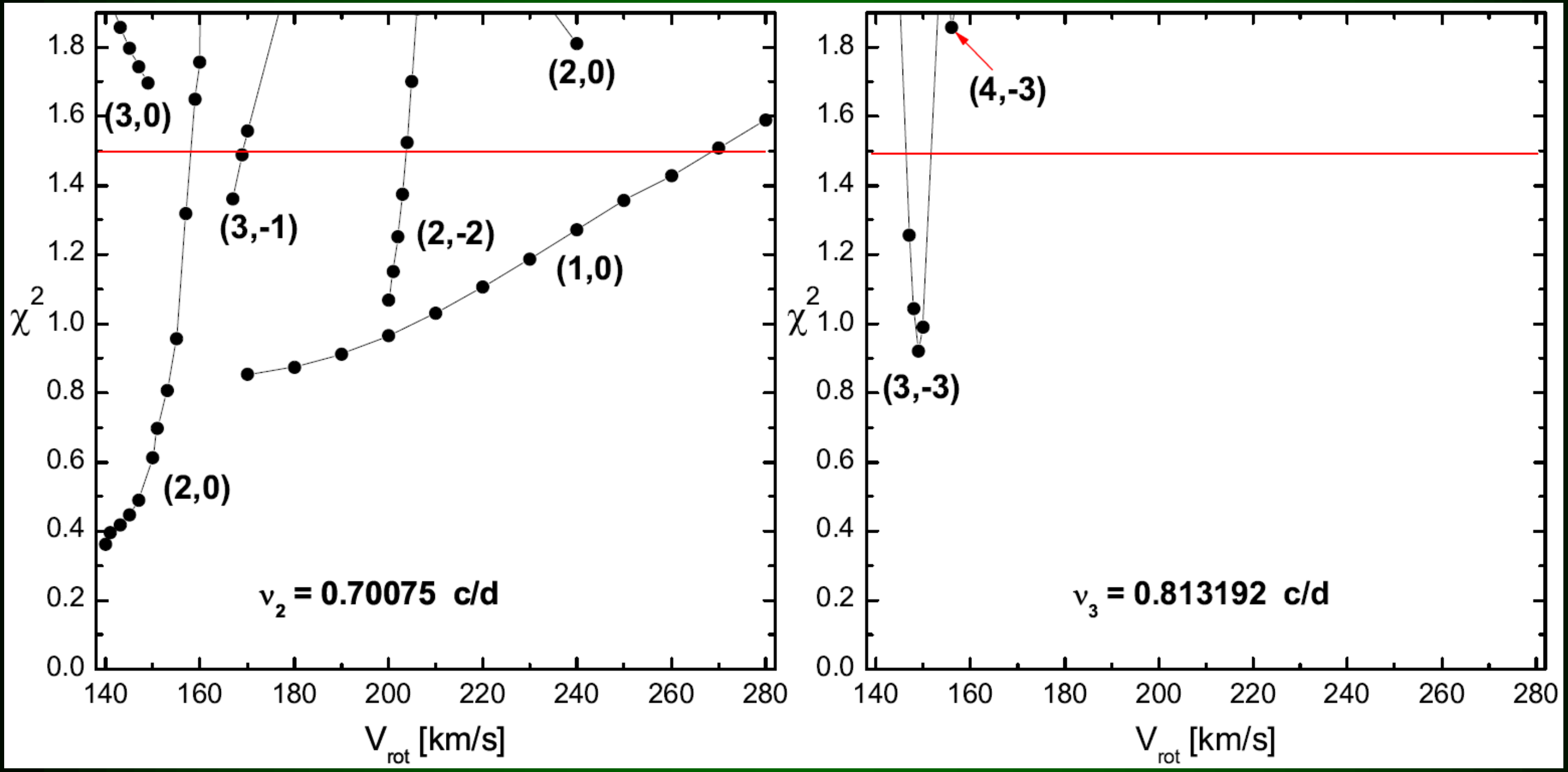
$$\chi^2 = \frac{1}{2N-2} \sum_{k=1}^{N} w_k |\varepsilon \mathcal{F}_k - \mathcal{A}_k|^2$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sum_{k=1}^{N} w_k \mathcal{A}_k \mathcal{F}_k^*}{\sum_{k=1}^{N} w_k |\mathcal{F}_k|^2}.}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{2N-2}\left(\sum_{k=1}^{N} w_k|\mathcal{A}_k|^2 - \frac{\sum_{k=1}^{N} w_k|\mathcal{A}_k\mathcal{F}_k^*|^2}{\sum_{k=1}^{N} w_k|\mathcal{F}_k|^2}\right)$$



1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
χ^2
140
160
180
200
220
240
260
280
V_{rot} [km/s]
(3,-1)
(1,0)
(5,-1)
ν_1 = 0.61574 c/d


χ²
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
140
160
180
200
220
240
260
280
V_rot [km/s]
(3,0)
(2,0)
(3,-1)
(2,-2)
(1,0)
(2,0)
ν₂ = 0.70075 c/d
(4,-3)
(3,-3)
ν₃ = 0.813192 c/d

Identyfikacja (ℓ,m) dla Modelu 1

frequency [c/d]	(ℓ, m)	$V_{\rm rot}$ [km/s]	ε	$A^{\rm cal}_{V_{\rm rad}}$ [km/s]
$\nu_1 = 0.61574$	$(1, 0)$	150−280	0.0052−0.0013	5.28−3.44
$\nu_2 = 0.70075$	$(2, 0)$	140−160	0.0015−0.0031	0.23−3.59
	$(1, 0)$	170−270	0.0022−0.0010	2.86−2.28
	$(2, -2)$	200−205	0.0013−0.0015	0.23−0.27
	$(3, -1)$	167−170	0.0093−0.0084	4.46−4.32
$\nu_3 = 0.81319$	$(3, -3)$	147−150	0.0047−0.0049	2.71−2.37
$\nu_4 = 1.20554$	$(4, -4)$	143−152	0.0037−0.0033	0.21−0.09
	$(4, 0)$	220−280	0.0028−0.0033	4.74−9.33
	$(3, -3)$	197−204	0.0080−0.0078	1.47−0.92
	$(r, -2)$	237−241	0.0063−0.0060	6.21−4.78
$\nu_5 = 0.65882$	$(1, 0)$	150−280	0.0026−0.0007	2.35−1.64
	$(3, -1)$	170−210	0.0071−0.0047	4.06−3.13
$\nu_6 = 0.56799$	$(4, -1)$	150−230	0.0022−0.0016	1.31−0.78
	$(2, -1)$	150−240	0.0018−0.0011	1.01−0.28
	$(2, -2)$	200−260	0.0013−0.0017	0.25−0.08

Identyfikacja (ℓ,m) dla Modelu 1 i V_{rot}=145-155 km/s

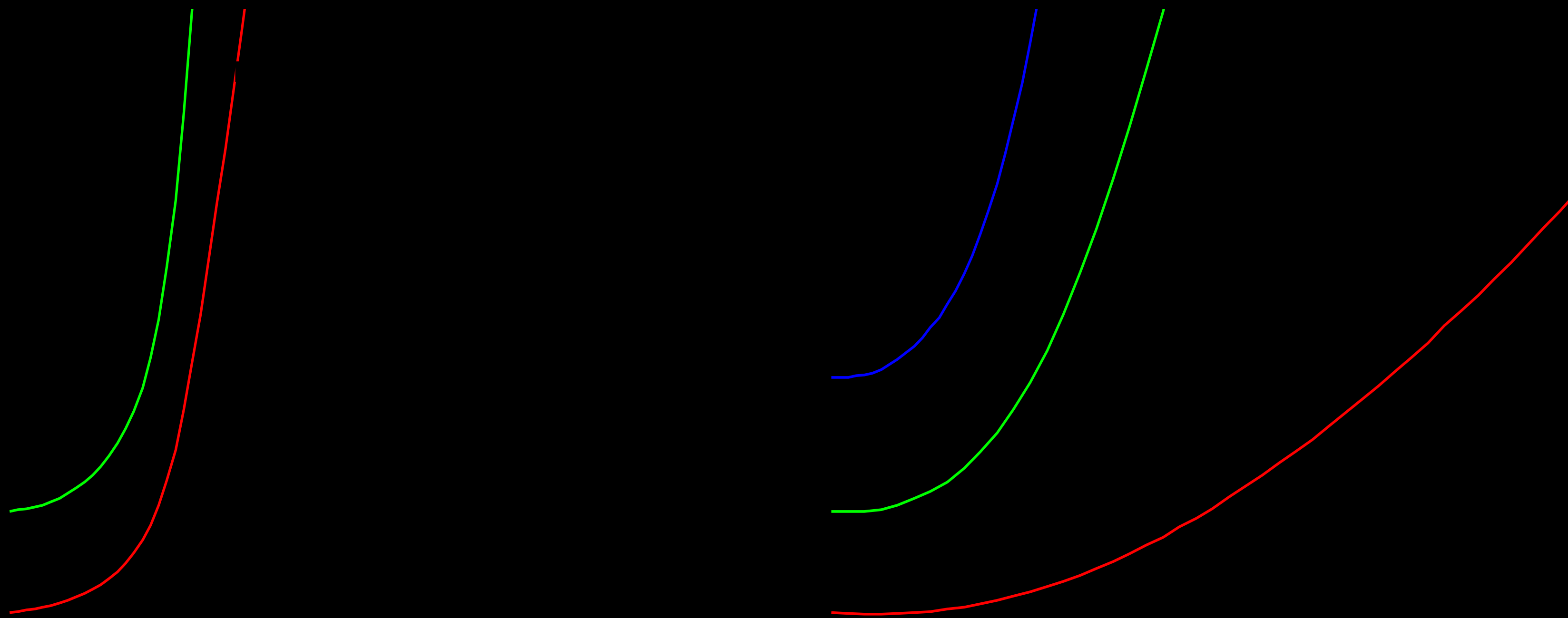
frequency [c/d]	(ℓ, m)	ε	$A^{\rm cal}_{V_{\rm rad}}$ [km/s]	$n_{\rm mod}$
$\nu_1 = 0.61574$	$(1, 0)$	0.0052	5.3	26
$\nu_2 = 0.70075$	$(2, 0)$	0.0017–0.0027	0.5-2.9	52-56
$\nu_3 = 0.81319$	$(3, -3)$	0.0047–0.0049	2.4–2.7	27
$\nu_4 = 1.20554$	$(4, -4)$	0.0033–0.0037	0.1–0.2	64-52
$\nu_5 = 0.65882$	$(1, 0)$	0.0026	2.4	24
$\nu_6 = 0.56799$	$(4, -1)$ $(2, -1)$	0.0022 0.0018	1.3 1.0	53 30

Identyfikacja (ℓ,m) dla Modelu 3 i V_{rot}=150 km/s

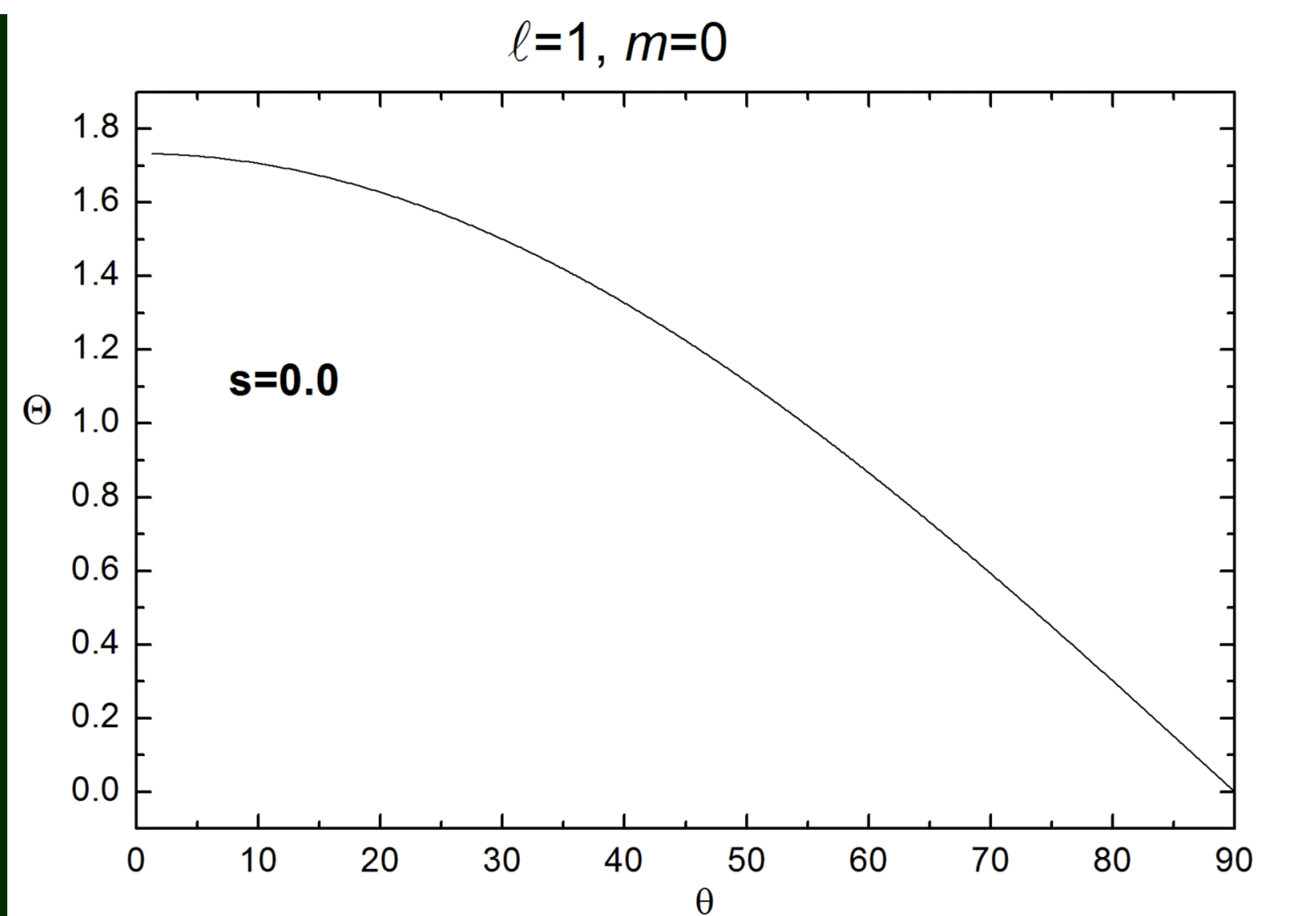
frequency [c/d]	(ℓ, m)	ε	$A^{\mathrm{cal}}_{V_{\mathrm{rad}}}$ [km/s]
$\nu_1 = 0.61574$	$(1, 0)$	0.0054	5.5
$\nu_2 = 0.70075$	$(1, +1)$	0.0003	1.5
	$(2, 0)$	0.0021	0.8
$\nu_3 = 0.81319$	$(3, -3)$	0.0047	2.4
$\nu_4 = 1.20554$	$(4, -4)$	0.0035	0.13
	$(2, +1)$	0.0018	1.9
$\nu_5 = 0.65882$	$(3, 0)$	0.0021	2.6
$\nu_6 = 0.56799$	$(6, -1)$	0.0025	1.0
	$(4, -1)$	0.0019	0.9
	$(2, -1)$	0.0017	0.9
	$(4, -3)$	0.0035	0.12

WNIOSKI

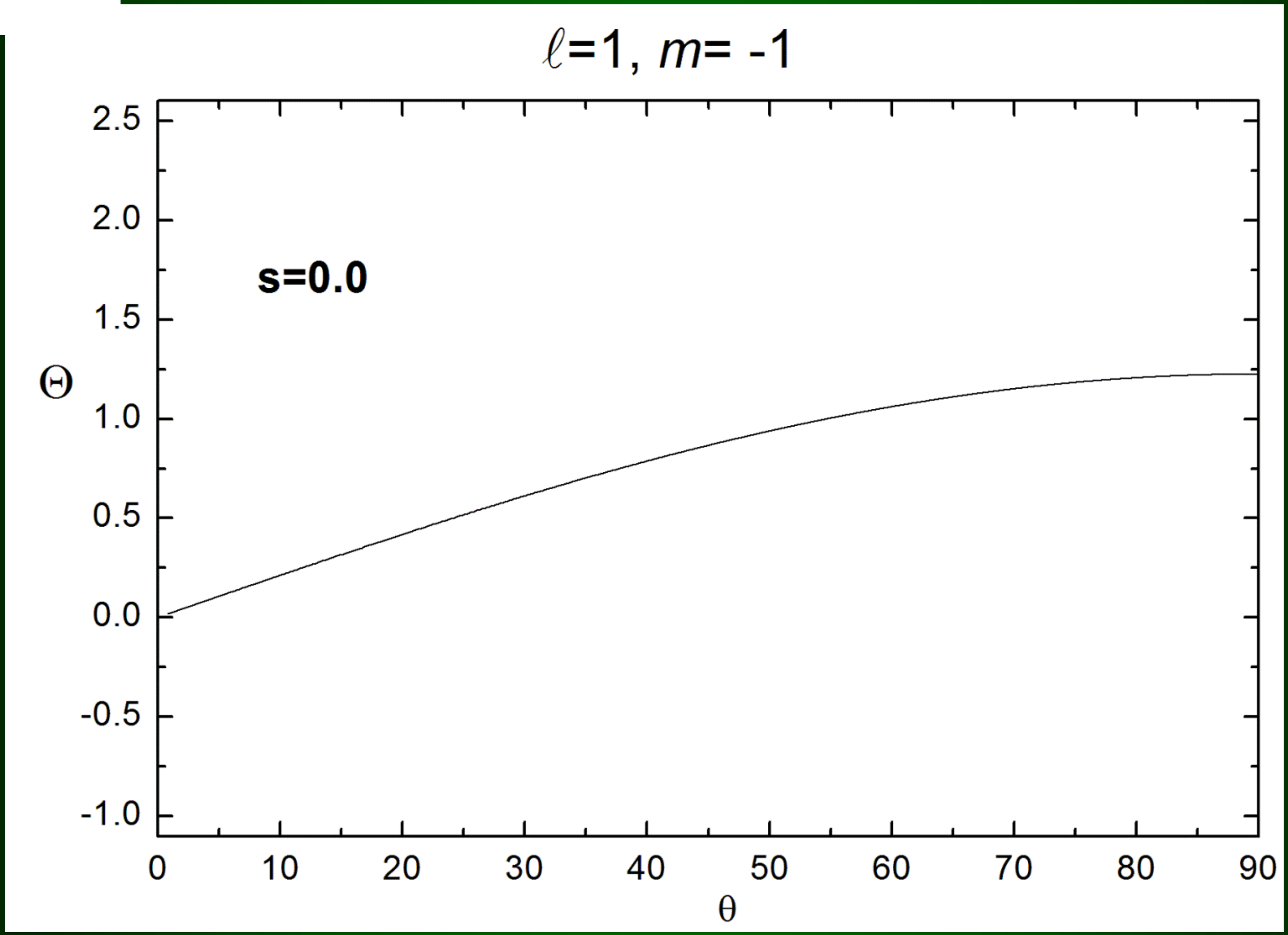
- identyfikacja modów g jest możliwa
- ograniczenia na inklinację, prędkość rotacji (V_{rot}sin i znane)
- warunki niestabilności i widoczności
- warunek na amplitudy swoiste, ε
- obserwacje spectroskopowe !



the Hough function

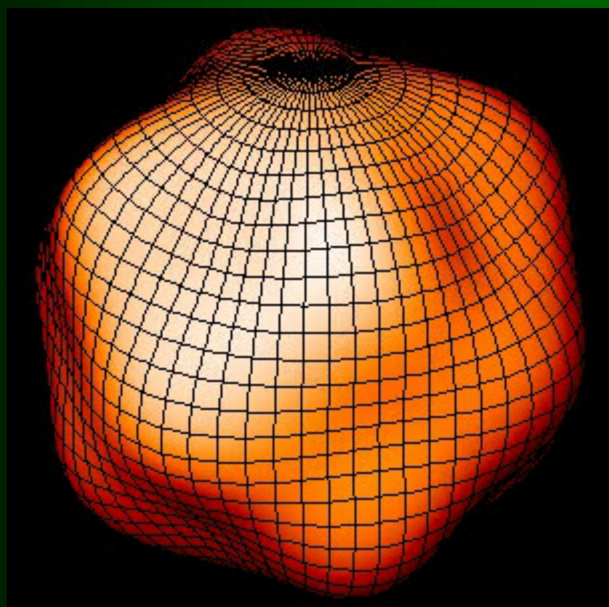


the Hough function

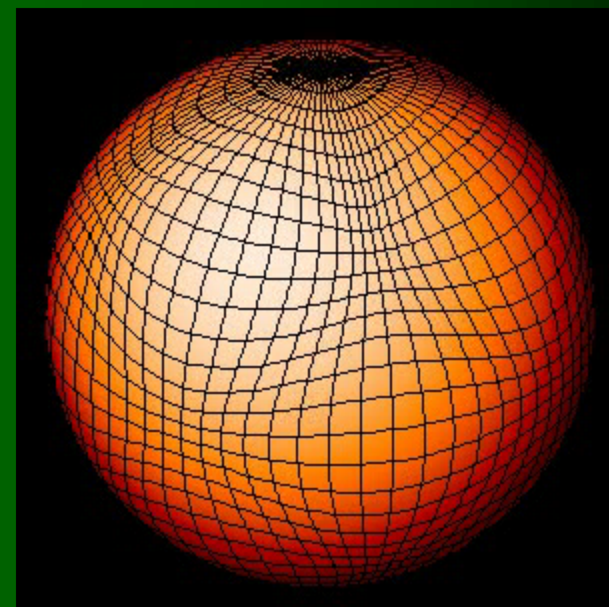


ℓ=6, m=+4

mod p



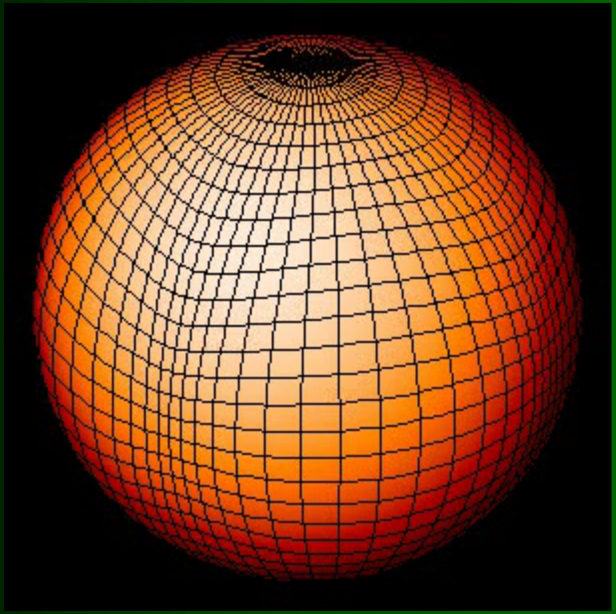
mod g



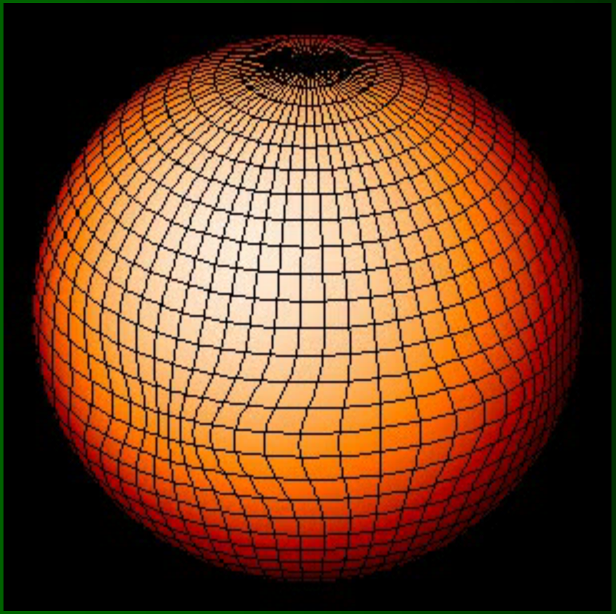
Rich

mod g , ℓ=4, m=+4

bez rotacji

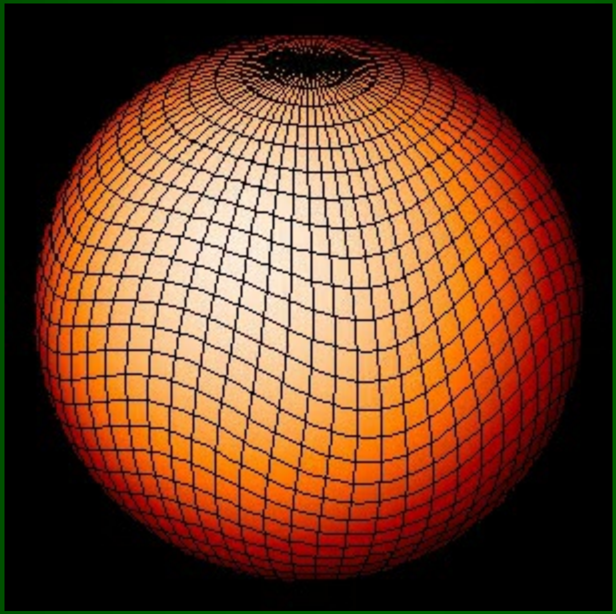


z rotacją



Rich

mod r, m=-4



R.

- *liniowa nieadiabatyczna teoria pulsacji*

Z modeli atmosfer:

- *pochodne monochromatycznego strumienia po T_{eff} and g*
- *współczynniki pociemnienia brzegowego: $h_\lambda(n,T_{eff}, g)$*

Complex amplitude of monochromatic flux variations

$$A_\lambda(i) = \varepsilon Y_\ell^m(i,0) b_\ell^\lambda (D_{1,\ell}^\lambda + D_{2,\ell} + D_{3,\ell}^\lambda)$$

$$D_{1,\ell}^\lambda = \frac{1}{4} f \frac{\partial \log(\mathcal{F}_\lambda |b_\ell^\lambda|)}{\partial \log T_{\mathrm{eff}}}$$

$$D_{2,\ell} = (2+\ell)(1-\ell)$$

$$D_{3,\ell}^\lambda = -\left(2 + \frac{3\omega^2}{4\pi G < \rho >}\right) \frac{\partial \log(\mathcal{F}_\lambda |b_\ell^\lambda|)}{\partial \log g_{\mathrm{eff}}^0}$$

f - complex parameter from linear nonadiabatic calculations

Radial velocity variations

$$V_{rad} = -\mathrm{i}\varepsilon\omega R N_l^0 d_{\ell m0}(i)(u_\ell + \alpha_H v_\ell)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

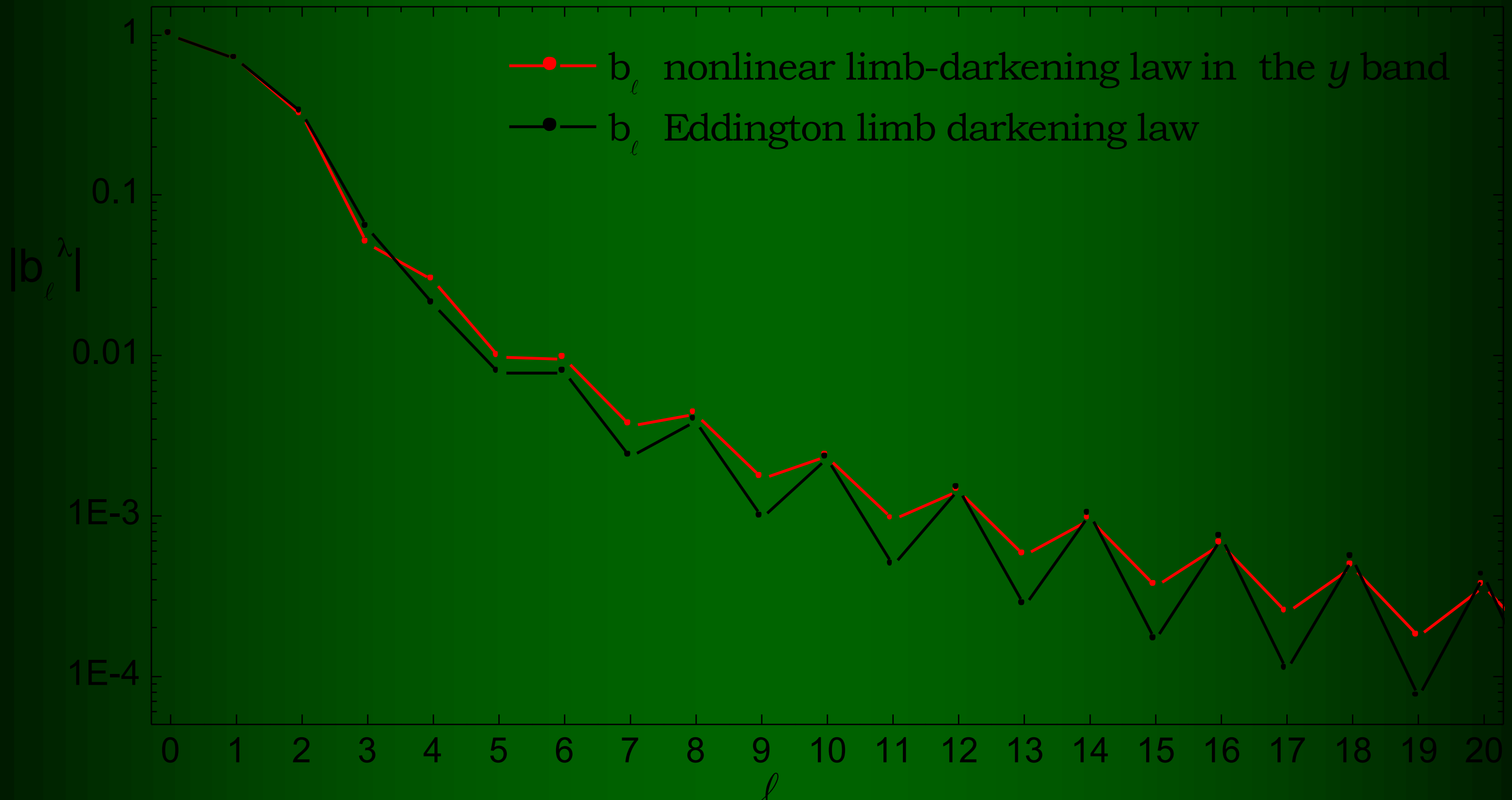
where

$$u_\ell = \int_0^1 h\mu^2 P_\ell(\mu) d\mu,$$

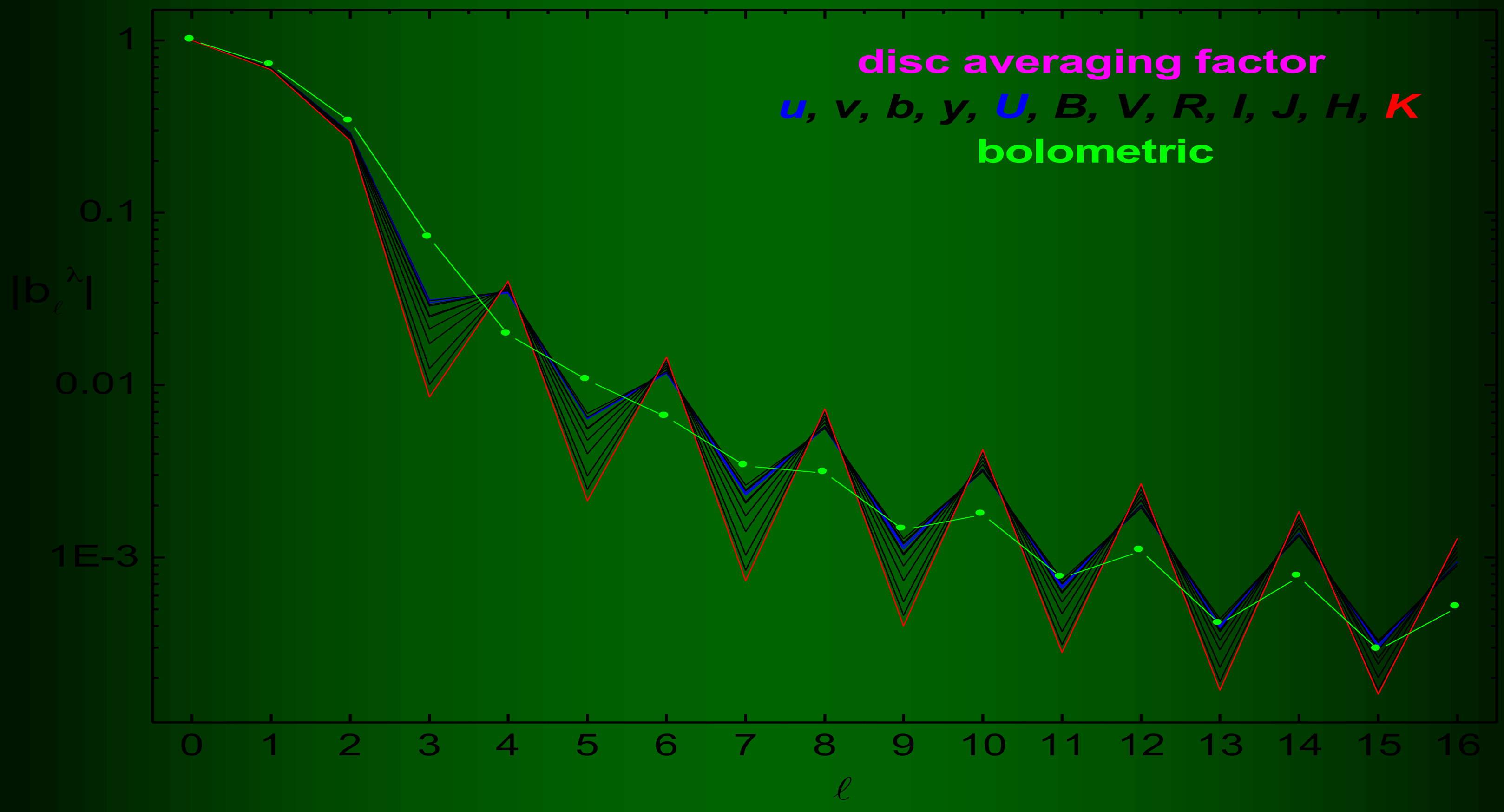
$$v_\ell = \ell \int_0^1 h(P_{\ell-1} - \mu P_\ell)\mu d\mu,$$

Czynnik uśredniania po dysku w funkcji stopnia ℓ

$$b_\ell^\lambda = \int_0^1 h_\lambda^0(\mu)\mu P_\ell(\mu)d\mu$$



***Efekt uśredniania:** całki b_ℓ^λ maleją szybko z rosnącym ℓ*



disc averaging factor
u, v, b, y, U, B, V, R, I, J, H, K
bolometric
1
0.1
0.01
1E-3
|b_ℓ^λ|
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
ℓ

Amplituda zespolona zmian jasności w paśmie x

$$\mathcal{A}_x(i) = \mathcal{D}^x(i) f \tilde{\varepsilon} + \mathcal{E}^x(i) \tilde{\varepsilon},$$

$$\mathcal{D}^x(i) = -1.086 \left(\frac{\alpha_T^x}{4} \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_3 \right),$$

$$\mathcal{E}^x(i) = -1.086 [2\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 - (2 + \varpi^{-1})(\alpha_g^x \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_4)],$$

Rozważamy zaburzenia:

- $$\xi_r = \varepsilon R \Theta Z$$
- $$\delta \mathbf{n}_s = -\varepsilon \nabla_H (\Theta Z) = -\varepsilon \left(0,\ \frac{\partial \Theta}{\partial \theta},\ \frac{im\Theta}{\sin\theta}\right) Z.$$
- $$\frac{\delta d\mathbf{S}}{dS} = \varepsilon \left(2\Theta, -\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, -\frac{im\Theta}{\sin\theta}\right) Z,$$
- $$\frac{\delta \mathcal{F}_{\mathrm{bol}}}{\mathcal{F}_{\mathrm{bol}}} = \varepsilon f \Theta Z,$$ $f(\omega, \lambda/\omega^2)$
- $$\frac{\delta g}{g} = -\varepsilon \left(\frac{\omega^2 R^3}{GM} + 2\right) \Theta Z,$$