

# PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2017/2018

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

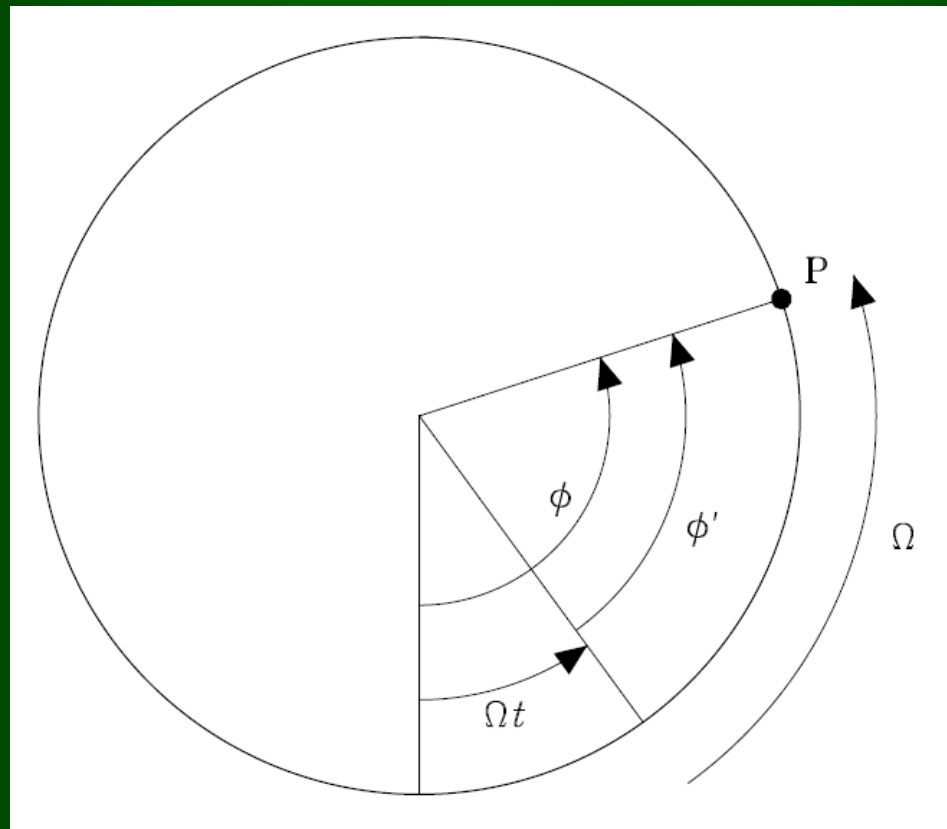
# EFEKTY ROTACJI

W gwiazdzie sferycznie symetrycznej częstotliwości oscylacji są niezależne od azymutalnego rzędu, **m**, degeneracja  $2\ell+1$ .

Odejście od symetrii sferycznej powoduje, że częstotliwości są rozszczepiane według **m**.

Najważniejszą tego przyczyną, i najbardziej oczywistą, jest **rotacja**.

**Geometria rozszczepienia rotacyjnego, w gwiazdzie rotującej z prędkością kątową  $\Omega$ . Punkt P ma długość astrograficzną  $\phi'$  w układzie rotującym z gwiazdą oraz długość  $\phi = \phi' + \Omega t$  w układzie nieruchomym.**



**Zależność czasowa w układzie współrotującym:**

$$\cos(m \phi' - \omega_0 t)$$

$\omega_0$  – częstotliwość oscylacji w układzie współrotującym

$$\phi' = \phi - \Omega t$$

$$\cos(m\phi - m \Omega t - \omega_0 t) \equiv \cos(m\phi - \omega_m t)$$

$$\omega_m = \omega_0 + m\Omega$$

**czyli odstęp w częstotliwościach  
jest równy prędkości kątowej rotacji**

Ten prosty opis dotyczy najważniejszego efektu rotacji, tak zwanej **adwekcji** .

Zakładamy w nim sztywną rotację oraz zaniedbujemy efekty siły Coriolisa i siły odśrodkowej.

## EFEKTY POWOLNEJ ROTACJI

Zaniedbujemy siłę odśrodkową oraz inne efekty drugiego i wyższych rzędów w  $\Omega$ .  
W szczególności zaniedbujemy efekty dystorsji.

Odpowiednio zmodyfikowane równanie ruchu ma postać

$$\omega^2 \delta \mathbf{r} = \frac{1}{\rho} \nabla p' - \mathbf{g}' - \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{g} + 2m\omega\Omega\delta\mathbf{r} - 2i\omega\mathbf{\Omega} \times \delta\mathbf{r} ,$$

Efekt rotacji rzędu  $O(\Omega)$   
pochodzący od adwekcji

Efekt siły Coriolisa

**Człony pochodzące od rotacji dostajemy przez odpowiednią modyfikację operatora siły w równaniu**

$$\omega^2 \delta \mathbf{r} = \mathcal{F}(\delta \mathbf{r}) ,$$

**Efekt zmiany w częstotliwościach oscylacji możemy policzyć z zasady wariacyjnej**

$$\delta \omega^2 = \frac{\int_V \delta \mathbf{r}^* \cdot \delta \mathcal{F}(\delta \mathbf{r}) \rho dV}{\int_V |\delta \mathbf{r}|^2 \rho dV} ,$$

**Wynik zapisujemy w postaci**

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} + m \int_0^R \int_0^\pi K_{nlm}(r, \theta) \Omega(r, \theta) r dr d\theta$$

**rotacyjne jądro całki,  $K_{nlm}$ , możemy policzyć z funkcji własnych dla modelu nierotującego**

**Ponieważ:**

$$K_{nlm} \propto m^2$$

**to  $\omega_{nlm} - \omega_{nl0}$  jest nieparzystą funkcją  $m$ :**

$$\delta \omega_{nl-m} = -\delta \omega_{nlm}$$



Ogólne wyrażenie na  $K_{nlm}$  jest dość skomplikowane.  
Znaczne uproszczenie otrzymujemy zakładając

$$\Omega = \Omega(r)$$

Odpowiadające temu przypadkowi jądro całki nie zależy od  $m$ , czyli równanie na  $\omega_{nlm}$  przewiduje jednorodne rozszczepienie rotacyjne.

Wynik zapisujemy zazwyczaj w postaci:

$$\delta\omega_{nlm} \equiv \omega_{nlm} - \omega_{nl0} = m\beta_{nl} \int_0^R K_{nl}(r)\Omega(r)dr ,$$

$$K_{nl} = \frac{(\xi_r^2 + \xi_h^2 - 2L^{-1}\xi_r\xi_h - L^{-2}\xi_h^2) r^2 \rho}{\int_0^R (\xi_r^2 + \xi_h^2 - 2L^{-2}\xi_r\xi_h - L^{-2}\xi_h^2) r^2 \rho dr} ,$$

$$L^2 = \ell(\ell+1)$$

$$\beta_{nl} = 1 - C_{nl}$$

$$\beta_{nl} = \frac{\int_0^R (\xi_r^2 + \xi_h^2 - 2L^{-1}\xi_r\xi_h - L^{-2}\xi_h^2) r^2 \rho dr}{\int_0^R (\xi_r^2 + \xi_h^2) r^2 \rho dr} ;$$

$$\beta_{nl} = 1 - C_{nl}$$

$C_{nl}$  – stała Ledoux, zależy od modu pulsacji  
i parametrów modelu gwiazdy

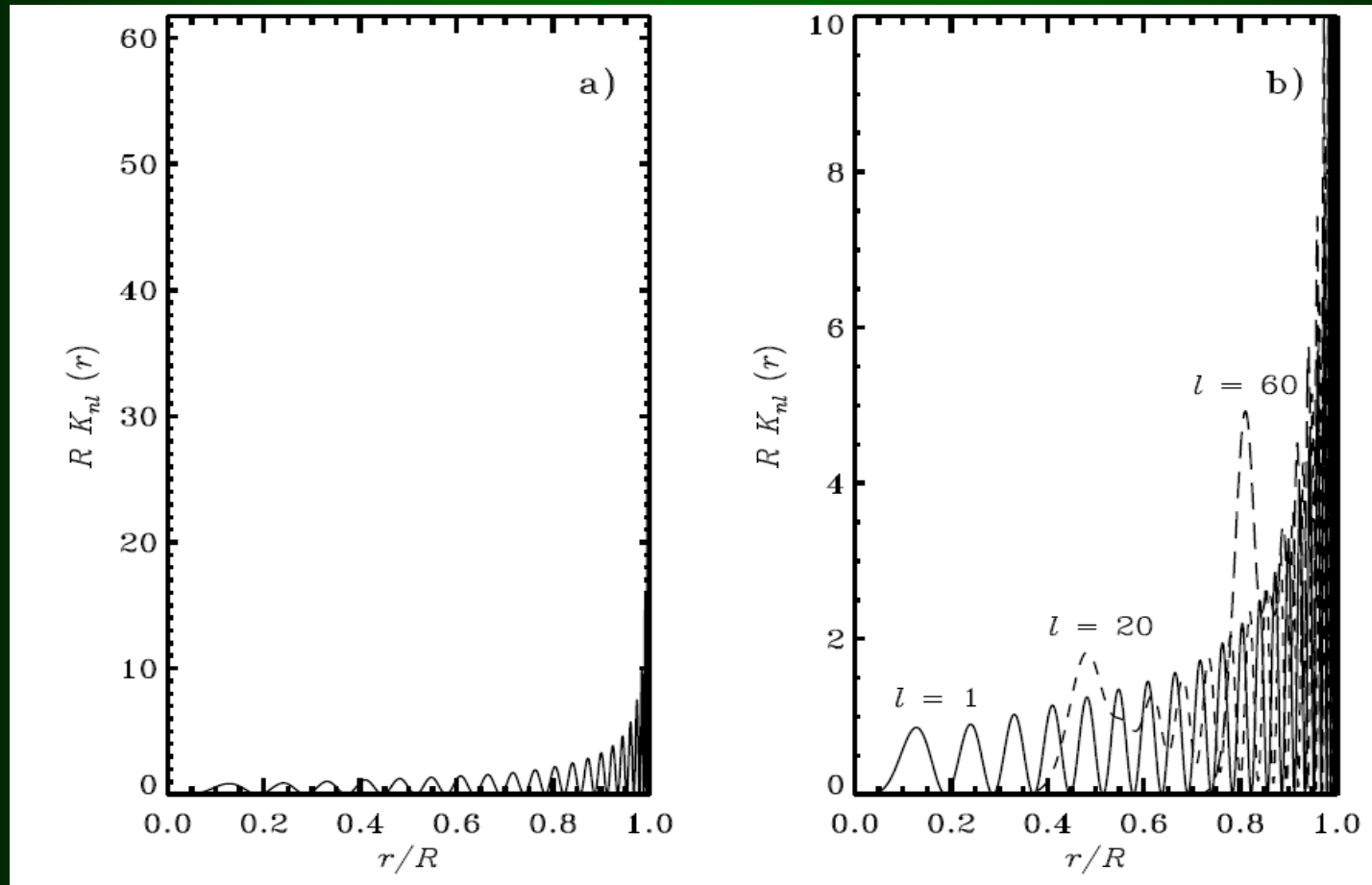
# Jądra całki, $K_{nlm}$ , dla obecnego modelu Słońca.

Panel a) – mod  $\ell=1, n=22, \nu=3239\mu\text{Hz}$

Panel b) – mody  $\ell=1, n=22, \nu=3239\mu\text{Hz}$

$\ell=20, n=17, \nu=3375\mu\text{Hz}$

$\ell=60, n=10, \nu=3234\mu\text{Hz}$



Jądro całki jest zdefiniowane tak, że  $\int K_{nl}(r)dr=1$ .  
Czyli dla sztywnej rotacji,  $\Omega = \Omega_s \neq f(r)$ , otrzymujemy

$$\delta\omega_{nlm} = m(1 - C_{nl})\Omega_s$$

W tym przypadku efekt rotacji jest całkowicie  
scharakteryzowany przez stałą Ledoux,  $C_{nl}$ .

Dla modów  $p$  wysokiego rzędu lub wysokiego stopnia człony  $\xi_r^2$  i  $\xi_h^2$  dominują i  $\beta_{nl} \approx 1$ , czyli  $C_{nl} \approx 0$ .

Rozszczepienie rotacyjne jest w przybliżeniu dane przez prędkość kątową rotacji,  $\Omega$

Fizycznie, zaniedbane człony w równaniu na  $\beta_{nl}$  wynikają z efektów siły Coriolisa.  
Czyli rotacyjne rozszczepienie modów  $p$  jest zdominowane przez **adwekcje**.

W przypadku modów **g** wysokich rzędów  
możemy zaniedbać  $\xi_r$ , czyli

$$\beta_{nl} \approx 1 - 1/L^2, \quad C_{nl} \approx 1/L^2$$

Rozszczepienia rotacyjne modów **g**  
są mniejsze niż dla modów **p**.

Np. rozszczepienie rotacyjne modów **g** wysokich rzędów  
o  $\ell=1$  wynosi tylko połowę prędkości kątowej rotacji.

## **Efekty umiarkowanej rotacji**

**Przybliżenie powolnej rotacji jest dostateczne dla wolnorotujących gwiazd, np. Słońca. Jednak w większości przypadków jest ono niewystarczające.**

**Soufi, Goupil, Dziembowski, 1998, A&A 334, 911  
rozwinęli formalizm perturbacyjny poprawny do  $O(\Omega^2)$ .  
Formalizm ten jest dla dowolnej rotacji  $\Omega=\Omega(r)$ .**

**Efekty rotacji drugiego rzędu:**

**Chlebowski, 1978, AcA 28, 441**

**Saio, 1981, ApJ 244, 299**

**Gough & Thompson, 1990, MNRAS 242, 25**

**Dziembowski & Goode, 1992, ApJ 294, 670**



## Efekty rotacji na strukturę gwiazdy

Musimy uwzględnić efekty siły odśrodkowej

$$\mathbf{f}_{\text{cen}} = \Omega^2 \varpi \mathbf{a}_{\varpi}$$

$\varpi$  - odległość od osi rotacji,  $\mathbf{a}_{\varpi}$  - wektor jednostkowy

We współrzędnych sferycznych mamy

$$\mathbf{f}_{\text{cen}} = \frac{\Omega^2}{3} \sin \theta (\sin \theta \mathbf{a}_r + \cos \theta \mathbf{a}_{\theta}) = \frac{\Omega^2}{3} \{ (2r \mathbf{a}_r - \nabla [r^2 P_2(\cos \theta)]) \}$$

## Krótkie wyjaśnienie

$$\nabla p = -\rho \nabla \phi + \rho \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = r\Omega^2 \sin \theta \mathbf{e}_s$$

przyspieszenie  
odśrodkowe

$$\mathbf{e}_s = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta$$

Wektor jednostkowy we  
współrzędnych walcowych

Przyspieszenie odśrodkowe możemy wrazić przez  $P_0(\cos \theta)$  i  $P_2(\cos \theta)$

$$\mathbf{F} = F_r(r) [1 - P_2(\cos \theta)] \mathbf{e}_r + F_\theta(r) \frac{dP_2}{d\theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$F_r(r) = \frac{2}{3} r \Omega^2 \text{ and } F_\theta(r) = -\frac{1}{3} r \Omega^2$$

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$$

Zakładamy rotację **jednorodną**

Ostatnie równanie dzieli siłę odśrodkową na dwie składowe:

- Pierwsza powoduje zmiany struktury gwiazdy w kierunku radialnym
- Druga powoduje odkształcenie od sferyczności opisane przez wielomiany Legendre'a  $P_2(\cos\theta)$ .

Podobna separacja jest słuszna także dla rotacji **niejednorodnej**

Ponieważ wymagamy dokładność do  $O(\Omega^3)$ , możemy traktować siłę odśrodkową jako małe zaburzenie.

W tym przypadku małą wielkością jest

$$\epsilon = \left( \frac{\Omega}{\omega_{\text{dyn}}} \right)^2$$

Łatwo pokazać, że

$$\left( \frac{\Omega^2 r}{g_0} \right) \leq \epsilon$$

Nierówność ta gwarantuje, że w każdym miejscu wewnątrz gwiazdy siła odśrodkowa jest dużo mniejsza niż siła grawitacji. Dlatego możemy linearyzować równania struktury gwiazdowej wokół równowagowego modelu sferycznie symetrycznego.

**Z przyjętą dokładnością, dowolną wielkość fizyczną,  
np. ciśnienie, możemy zapisać w postaci**

$$p = p_0(r) + \epsilon[\tilde{p}_0(r) + \tilde{p}_2(r)P_2(\cos \theta)]$$

**Tak zapisane wielkości wstawiamy do zmodyfikowanego równania  
równowagi hydrostatycznej, a następnie wydzielimy wyrazy  
niezależne od  $\theta$  i te proporcjonalne do  $P_2$ .**

Jeśli założymy, że rotacja jest jednorodna, to efekty rotacji w średnim, sferycznie symetrycznym modelu uwzględniamy poprzez modyfikację równania równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dp_0}{dr} = -\left(g_0 - \frac{2}{3}r\Omega^2\right)\rho_0$$

Czyli sferycznie symetryczna składowa perturbacji związanych z siłą odśrodkową jest zawarta w średniej strukturze modelu.

Perturbacje te powodują zmiany w częstotliwościach modów normalnych.

## **Efekty rotacji na częstotliwości własne i funkcje własne**

**Poprawki do  $\omega$  spowodowane siłą Coriolisa i nieradialną składową siły odśrodkowej możemy oszacować korzystając z zasady wariacyjnej.**

Operator  $F$  zapisujemy w postaci

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \epsilon \mathcal{F}_2 ,$$

gdzie

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0,0} - 2i\omega\Omega \times \delta\mathbf{r}$$

$\mathcal{F}_{0,0}$  zawiera sferycznie symetryczną składową zaburzenia spowodowanego siłą odśrodkową

$\mathcal{F}_0$  zawiera dodatkowo efekty siły Coriolisa.

$\epsilon\mathcal{F}_2$  operator zaburzeń opisujący zniekształcenia spowodowanego siłą odśrodkową.  
Jest proporcjonalny do  $P_2$  i  $dP_2/d\theta$ .



Wektor przesunięcia,  $\delta\mathbf{r}$ , musi teraz zawierać dodatkowe człony, ponieważ siła Coriolisa działająca na przesunięcia poloidalne generuje składowe toroidalne:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}_p + \delta\mathbf{r}_t$$

Postać  $\delta\mathbf{r}_p$  została podana na poprzednich wykładach, natomiast  $\delta\mathbf{r}_t$  wyraża się wzorem

$$\delta\mathbf{r}_t = \sqrt{4\pi} \frac{\xi_t(r)}{L} \Re \left[ \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi} \mathbf{a}_\theta - \frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta} \mathbf{a}_\phi \right) \exp(-i\omega t) \right]$$

Z definicji mamy

$$\text{curl}_r \delta\mathbf{r}_p \equiv 0, \quad \delta r_{t,r} \equiv 0, \quad \text{div} \delta\mathbf{r}_t \equiv 0$$

**Składowe poloidalne odpowiadające sferycznym harmonikom  $Y_l^m$  generują składowe toroidalne  $\propto Y_{l\pm 1}^m$**

**Licząc  $\nabla_r \times \delta \mathbf{r}_p$  otrzymujemy formułę na  $\xi_{t,l\pm 1}$  z dokładnością do  $O(\Omega^2)$ , która wyraża się przez  $\xi_{r,l}$  i  $\xi_{h,l}$**

**Częstotliwość modów toroidalnych**

$$\omega_t = m\Omega - 2m\Omega/[l(l+1)]$$

**Z formuły wariacyjnej szacujemy poprawki do częstotliwości związane z niesferycznymi efektami siły odśrodkowej oraz efektem składowych toroidalnych:**

$$\delta\omega = \delta\omega_t + \delta\omega_d + O(\Omega^4),$$

$$\delta_t\omega = \frac{1}{I} \int \delta\mathbf{r}_t^* \cdot \left( \frac{\omega}{2} \delta\mathbf{r}_t + \boldsymbol{\Omega} \times \delta\mathbf{r}_t \right) \rho dV$$

$$\delta_d\omega = \frac{\epsilon}{2\omega I} \int \delta\mathbf{r}_p^* \cdot \mathcal{F}_2(\delta\mathbf{r}_p) \rho dV ,$$

$$I = \int |\delta\mathbf{r}_p|^2 \rho dV .$$

**Z zasady wariacyjnej otrzymujemy wyrażenie trzeciego rzędu na rotacyjne rozszczepienie częstotliwości**

$$\nu_m = \nu_0 + m(1 - C_{nl})\frac{\Omega}{2\pi} + \frac{\Omega^2}{2\pi\nu_0}(D_0 + m^2D_1) + m\frac{\Omega^3}{\nu_0^2}T$$

**$\nu_0$  zawiera uśrednione horyzontalnie efekt siły odśrodkowej w modelu równowagowym**

**W obliczeniach ewolucyjnych zazwyczaj zakłada się sztywną rotację oraz zachowanie całkowitego momentu pędu w czasie ewolucji na ciągu głównym.**

Współczynniki  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $T$  są odpowiednio poprawkami drugiego i trzeciego rzędu otrzymane metodą zaburzeń. Uwzględniają niesferycznie symetryczne odkształcenia spowodowane siłą odśrodkowa i efektami drugiego i trzeciego rzędu siły Coriolisa.

Człony kwadratowe burzą symetrię multipletów oraz powodują przesunięcie w częstotliwości dla modów radialnych i nieradialnych modów strefowych,  $m=0$ .

Formuła nie zawiera efektu sprzężenia modów.

Sprzęgają się mody, których stopień sferycznej harmoniki różni się o 2, a rząd azymutalny jest ten sam,  $\ell_1 = \ell_2 \pm 2$ ,  $m_1 = m_2$ .

Efekty sprzężenia zaczynają odgrywać rolę, kiedy odległość między częstotliwościami pulsacji staje się porównywalna z częstotliwością rotacji,  $|\omega_1 - \omega_2| \approx \Omega$ .

## ROTACYJNE SPRZĘŻENIE MODÓW

Rotacyjne sprzężenie modów jest głównym efektem umiarkowanej rotacji,  $\Omega/\omega \ll 1$ . Występuje, gdy

$$\omega_j - \omega_k \sim \Omega \quad \ell_j = \ell_k \pm 2 \quad m_j = m_k$$

Funkcje własne danego modu są superpozycją wszystkich modów spełniających powyższy warunek

$$\vec{\xi} = \sum_k a_k \vec{\xi}_{0k}$$

$a_k$  - wkład modu  $k$

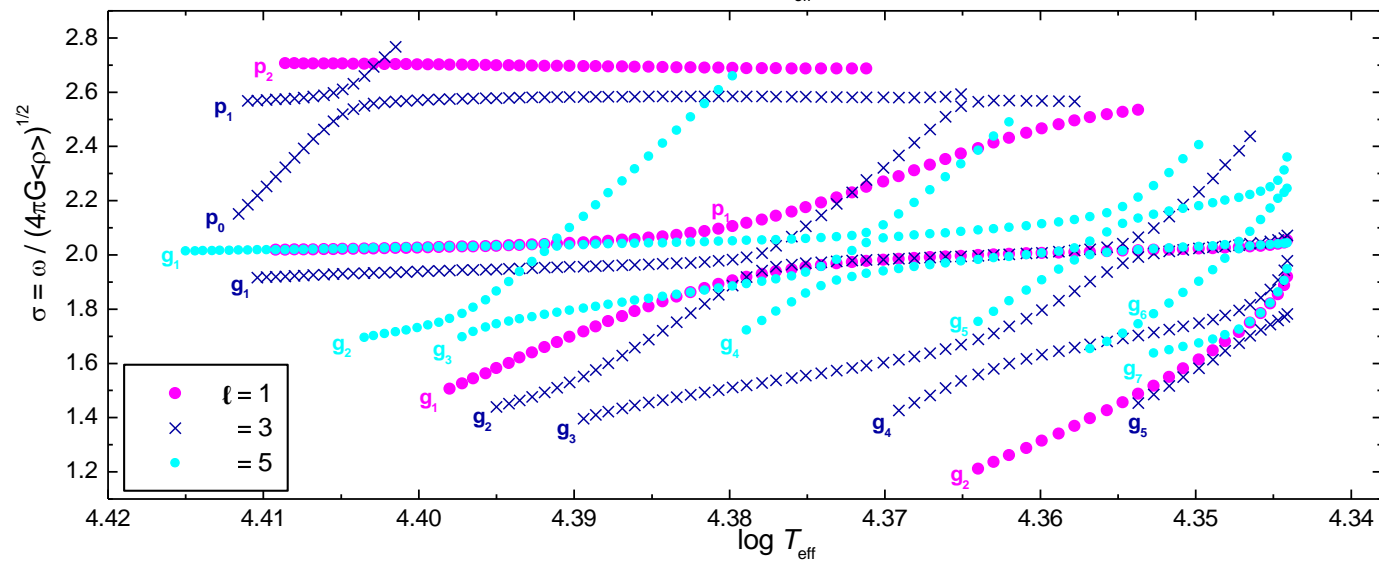
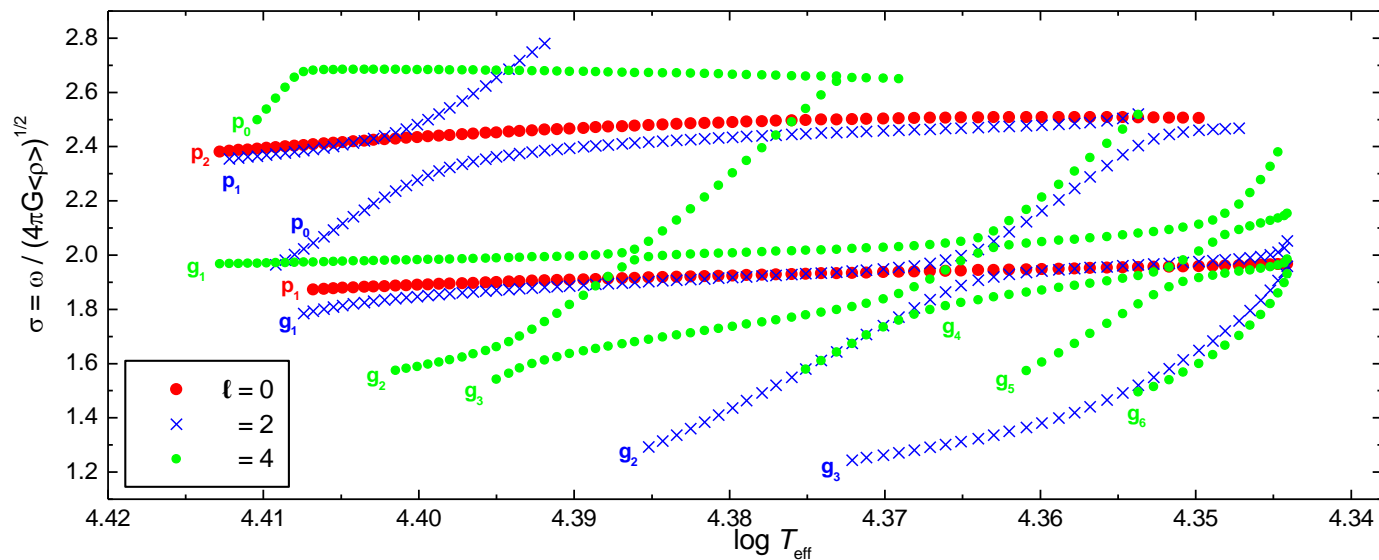
Współczynniki te dotrzymujemy z liniowej teorii perturbacyjnej

**Wartości współczynników  $a_k$  zależą od:**

- **prędkości rotacji**
- **różnicy częstotliwości**
- **właściwości modów (inercji)**

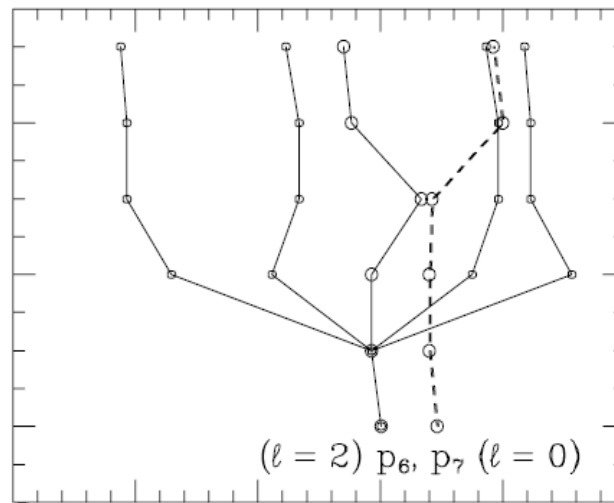
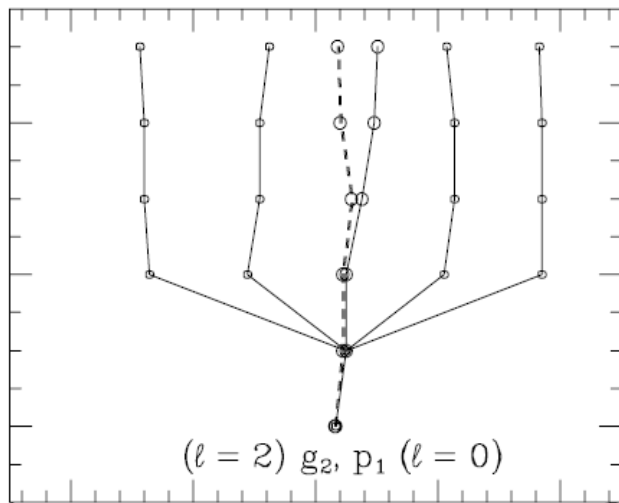
**Mody akustyczne sprzęgają się silniej niż grawitacyjne, ponieważ mają mniejsze wartości inercji (są „łżejsze”).**

# Bliskie częstotliwości w modelach $\beta$ Cep o masie $12 M_{\odot}$

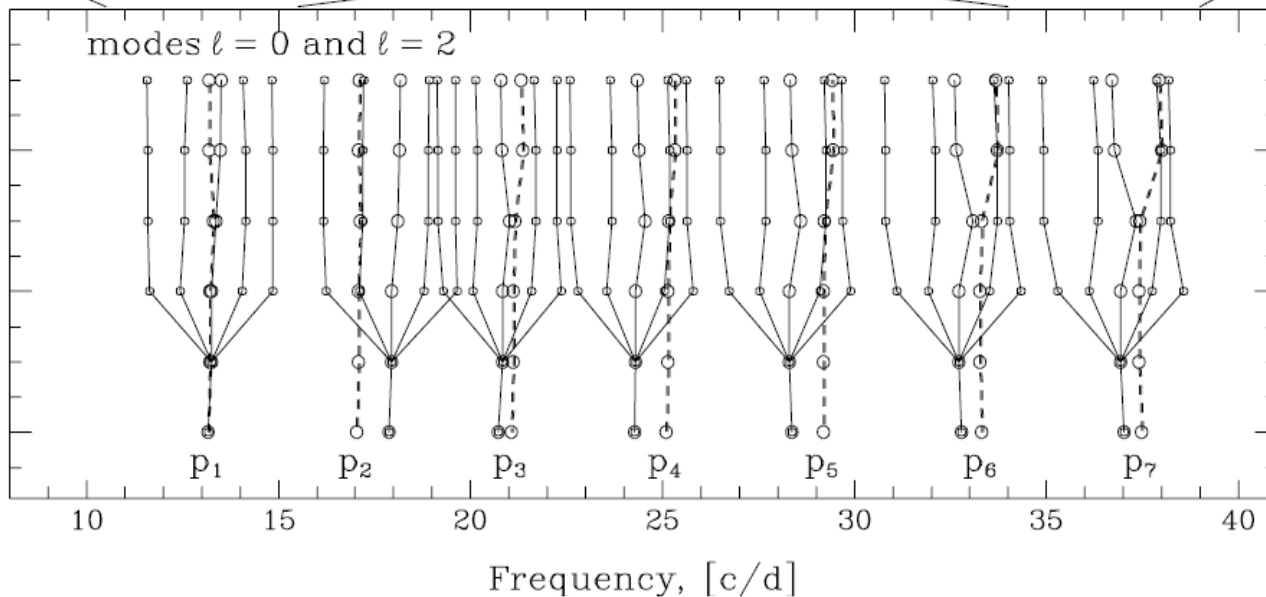




Wkład kolejnych efektów rotacji do częstotliwości modów  $p$ ,  $\ell=0$  i  $\ell=2$ ,  
dla modelu o parametrach:  $M=1.8 M_{\odot}$ ,  $T_{\text{eff}}=7515$  K,  $V_{\text{rot}}=92$  km/s.

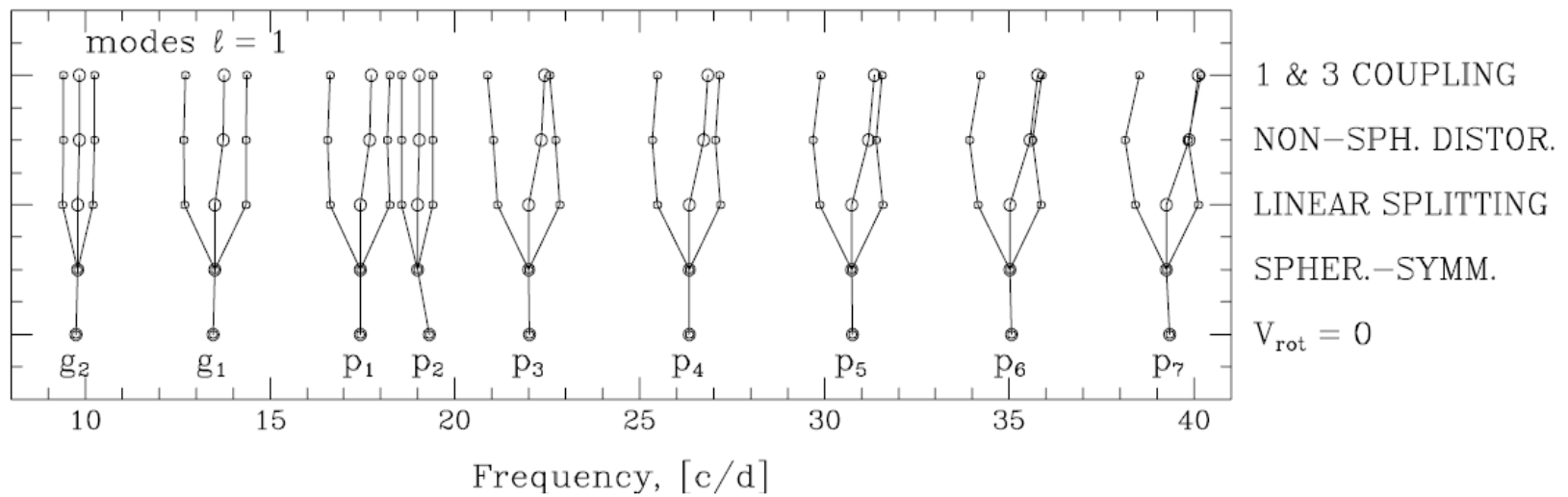


0, 2, 4 COUPLING  
0 & 2 COUPLING  
NON-SPH. DISTOR.  
LINEAR SPLITTING  
SPHER.-SYMM.  
 $V_{\text{rot}} = 0$



0, 2, 4 COUPLING  
0 & 2 COUPLING  
NON-SPH. DISTOR.  
LINEAR SPLITTING  
SPHER.-SYMM.  
 $V_{\text{rot}} = 0$

Wkład kolejnych efektów rotacji do częstotliwości modów  $\ell=1$ ,  
 dla modelu o parametrach:  $M=1.8 M_{\odot}$ ,  $T_{\text{eff}}=7515 \text{ K}$ ,  $V_{\text{rot}}=92 \text{ km/s}$ .



**Mody sprzężone oznaczamy przez  $l'$  i numerujemy stosując zasadę „avoided crossing”.**

**Zazwyczaj  $l'$  oznacza mod o największej amplitudzie powierzchniowej.**

## **Mody g w gwiazdach rotujących**

**Dla gwiazd SPB często mamy  $\omega \sim \Omega$ . Wówczas nie możemy stosować formalizmu perturbacyjnego.**

## Przybliżenie tradycyjne

Zaniedbujemy horyzontalną składową siły Coriolisa związaną z ruchem radialnym oraz składową radialną siły Coriolisa związaną z ruchem horyzontalnym

Dobre dla modów o niskich częstotliwościach, w przypadku których ruch horyzontalny dominuje pulsację.

## Założenia

- $\omega \sim \Omega \ll N(r)$

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)$$

- $(\Omega / \Omega_{\text{crit}})^2 \ll 1$

- przybliżenie Cowlinga

**Wówczas możliwa jest separacja zależności  
kątowych i radialnych w funkcjach własnych**

$$s = 2\Omega/\omega \quad \ell(\ell + 1) \rightarrow \lambda(s) \quad Y_l^m(\theta, \varphi) \rightarrow \Theta_\lambda(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

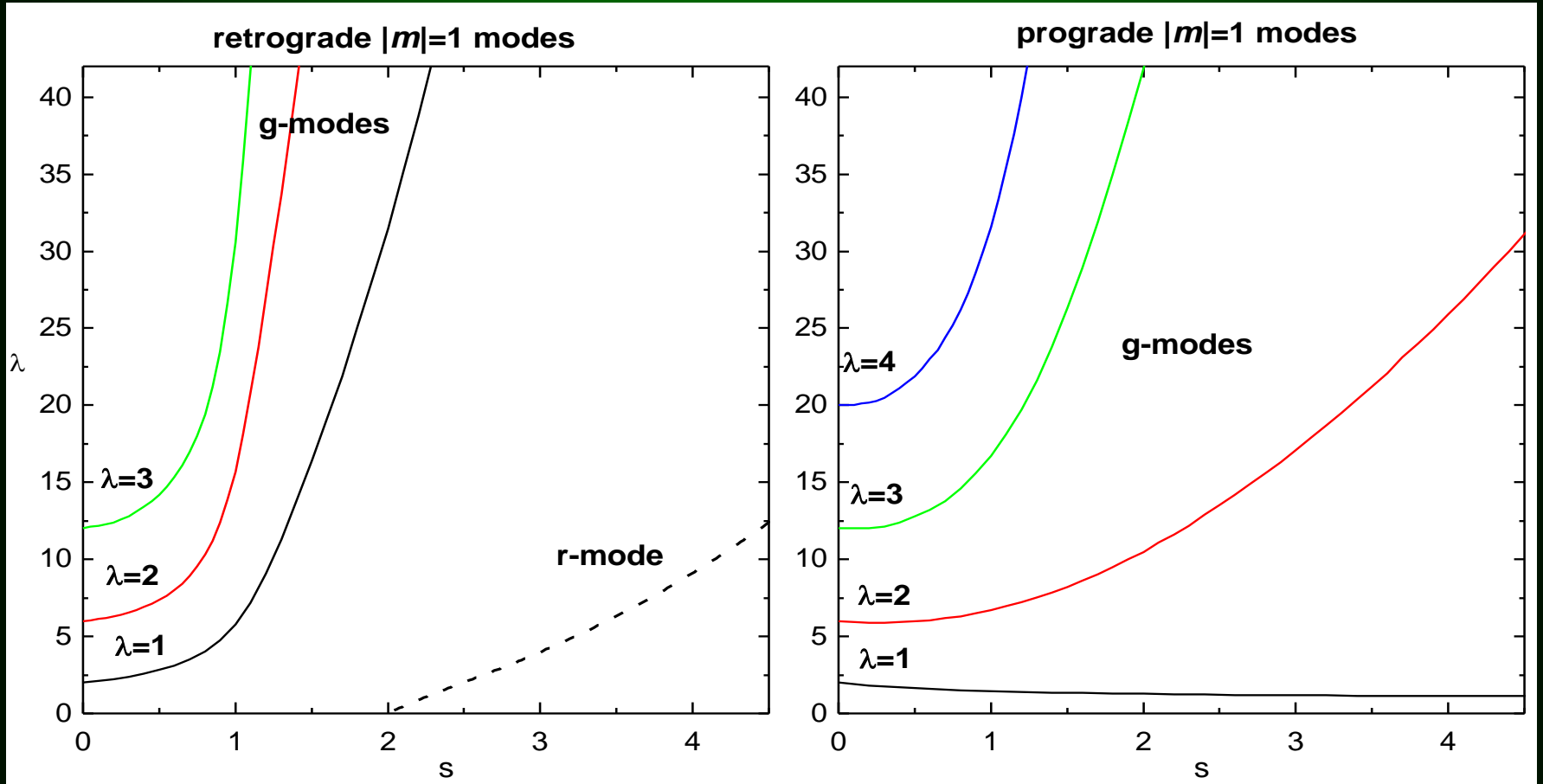
$\Theta_\lambda(\cos\theta)$  – funkcje Hougha

**Mody z  $\lambda > 0$  propagują się w obszarze promienistym ( $N > 0$ ).  
Radialna liczba falowa**

$$k_r \approx \frac{\sqrt{\lambda}}{r} \frac{N}{\omega}$$

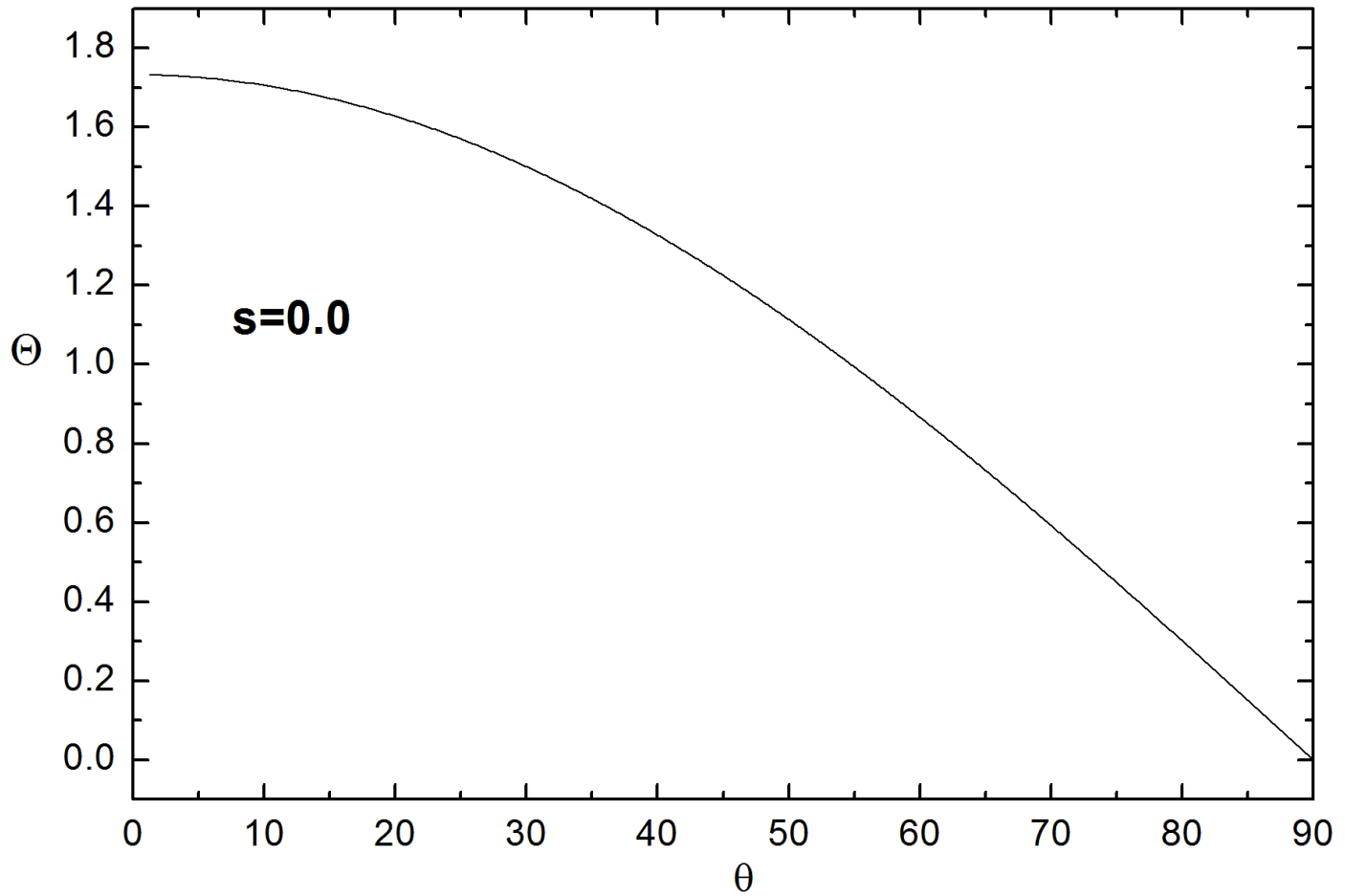
# Definicija stopnja modu, $\lambda$

$$s = 2\Omega/\omega \rightarrow 0 \text{ to } \lambda \rightarrow \ell(\ell + 1)$$

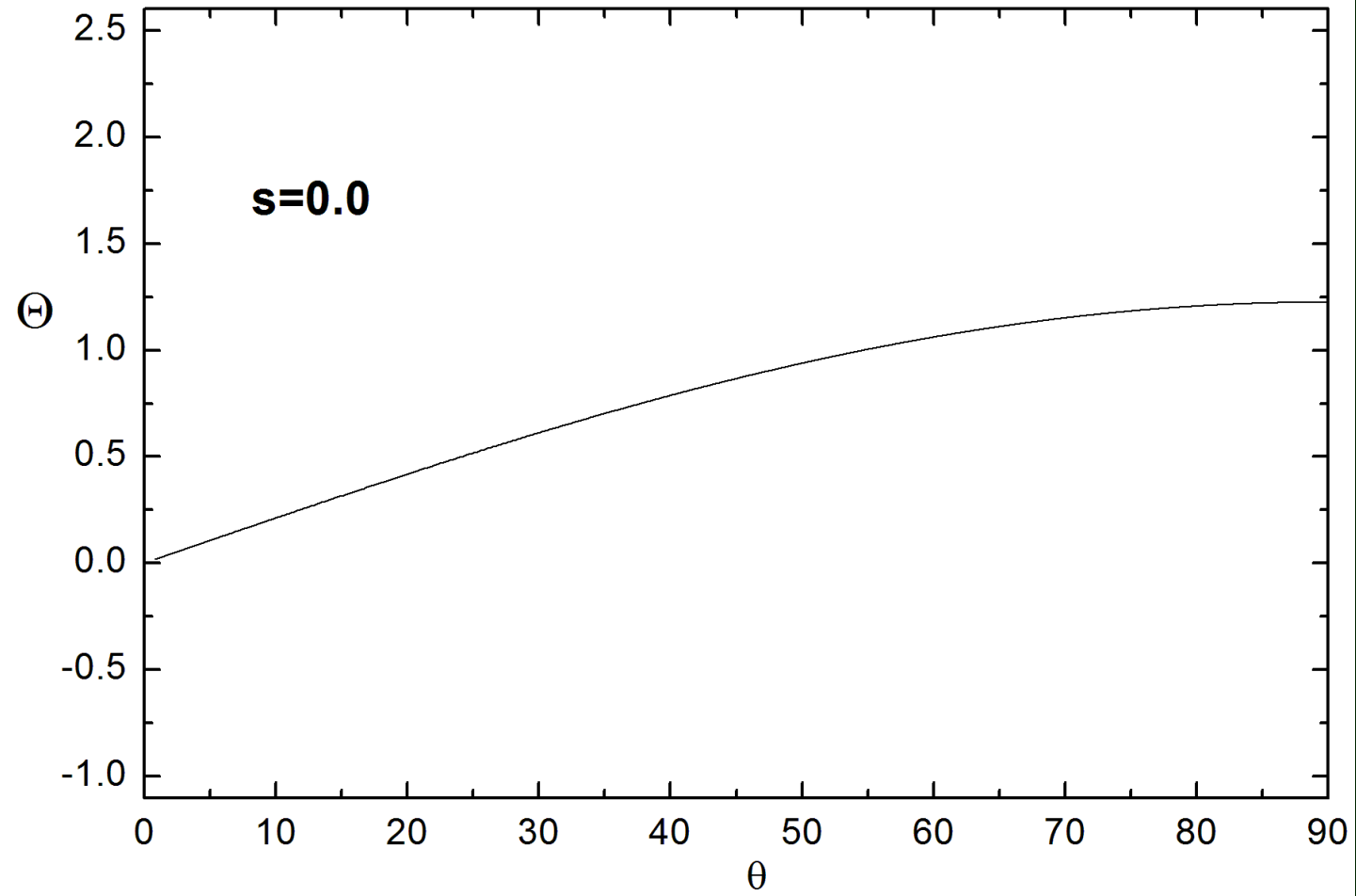




$\ell=1, m=0$



$\ell=1, m=-1$

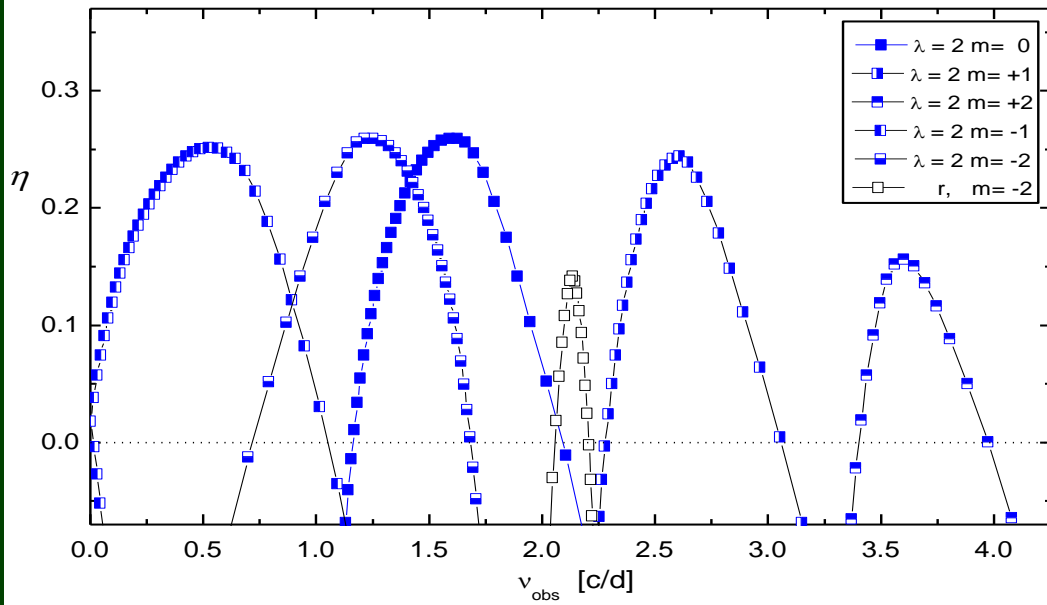
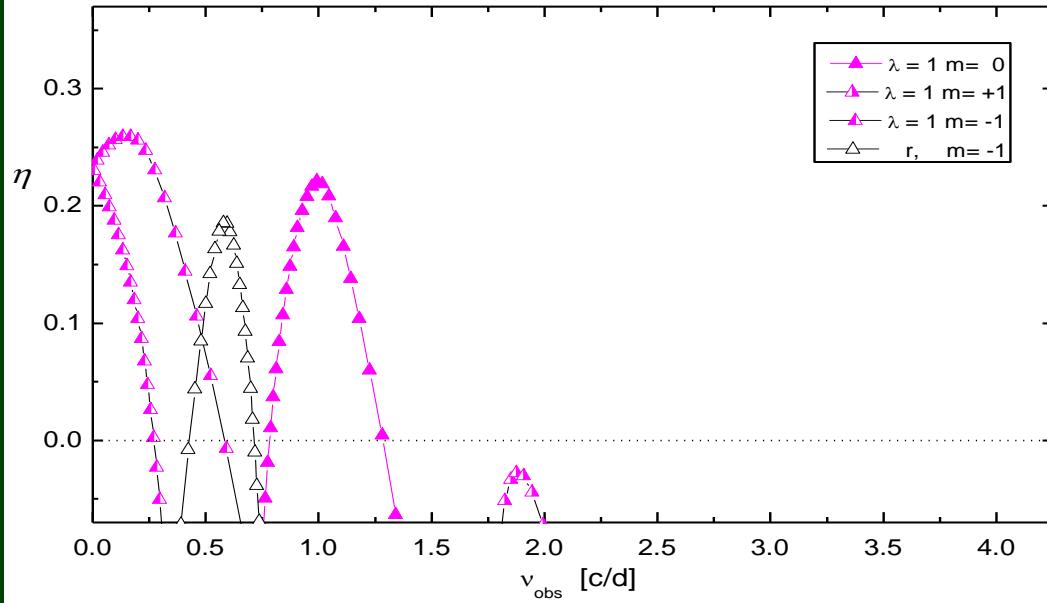


**Parameter niestabilności  $\eta$  zależy od  $\omega$  i  $\lambda/\omega^2$  (kształt f. własnych)**

**Aby mod był niestabilny:**

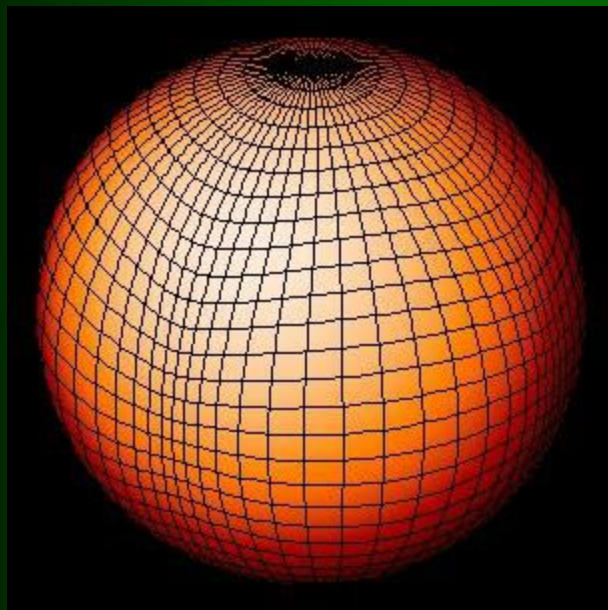
- $2\pi/\omega \approx \tau_{th}$  w warstwie napędzającej
- $\lambda/\omega^2$  – definiuje zależność radialną funkcji własnych  
ciśnieniowa f. własna musi być duża w warstwie napędzającej

$V_{\text{rot}} = 300 \text{ km/s}$

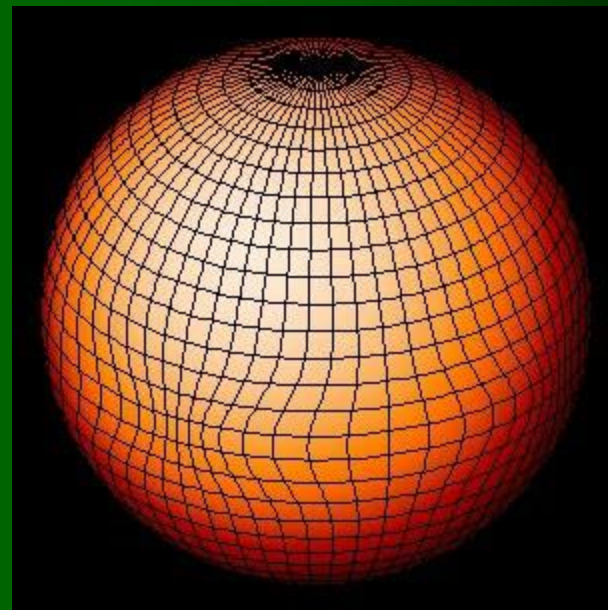


**mod  $g$  ,  $\ell = 4$  ,  $m = +4$**

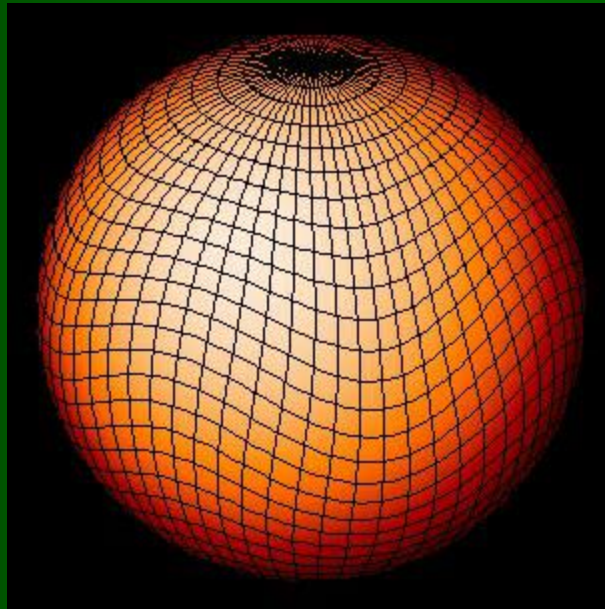
**bez rotacji**



**z rotacją**



**mod r, m=-4**



**WPLÝW ROTACJI NA DIAGNOSTYCZNE  
WŁASNOŚCI DIAGRAMÓW FOTOMETRYCZNYCH**

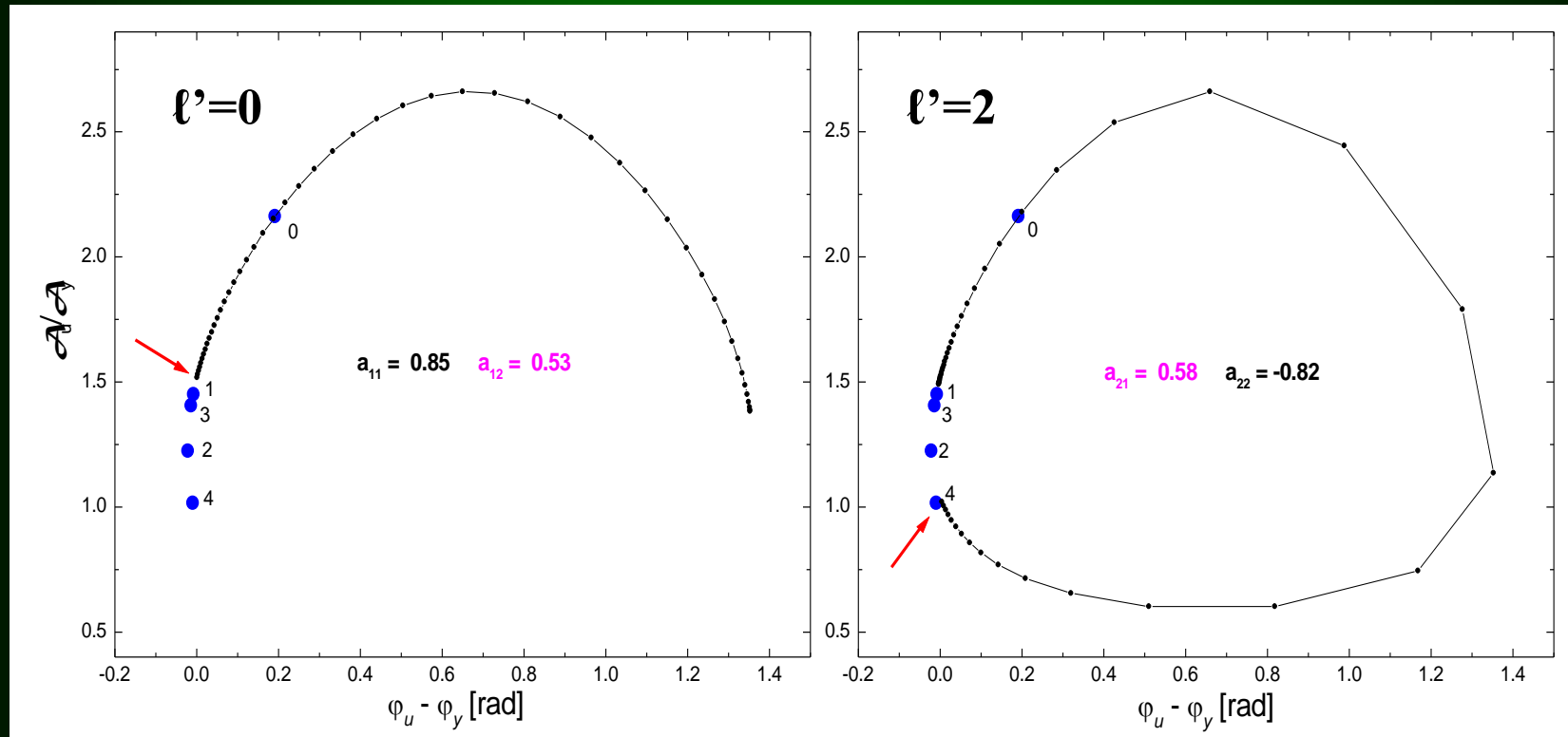
**Jeśli uwzględnimy efekty rotacji to fotometryczne diagramy diagnostyczne stają się zależne od kąta inklinacji,  $i$ , azymutalnego rzędu,  $m$ , oraz prędkości rotacji,  $V_{\text{rot}}$ .**



# FOTOMETRYCZNA AMPLITUDA ZESPOLONA MODÓW SPRZEŻONYCH

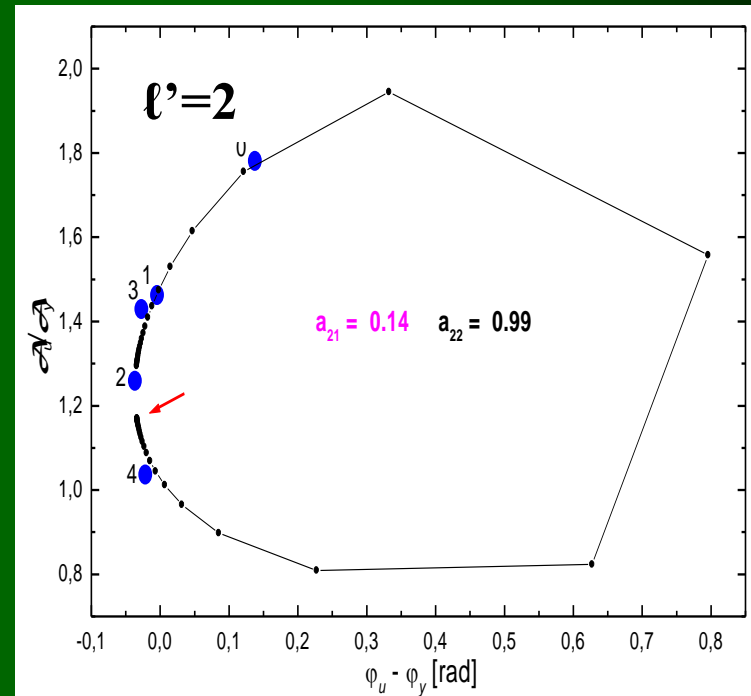
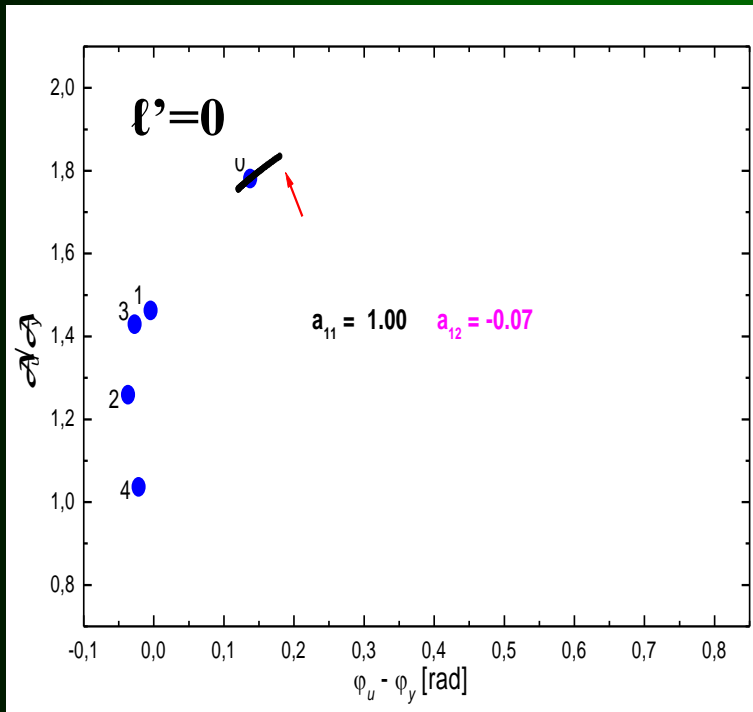
$$\mathcal{A}_\lambda(i) = \sum_k a_k A_{\lambda,k}(i)$$

Efekt sprzężenia modów  $\ell = 0, p_1$  i  $\ell = 2, g_1, m = 0$ ,  
 $\Delta\sigma_0 = 0.003$ , dla modelu  $\log T_{\text{eff}} = 4.374$ ,  $V_{\text{rot}} = 100$  km/s.

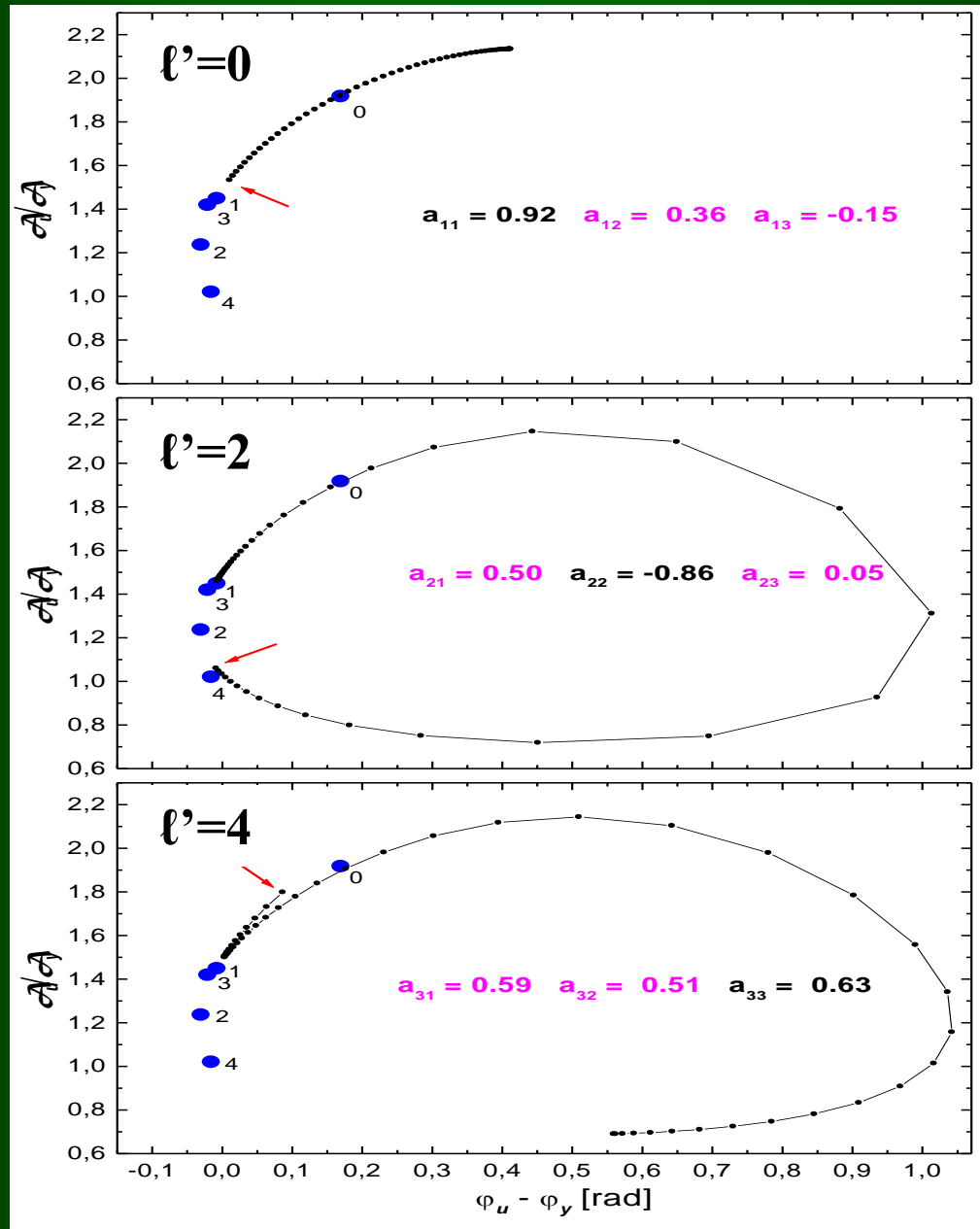


Odległość pomiędzy kolejnymi kropkami wynosi 0.02 w  $\cos i$ .  
 Czerwona strzałka oznacza obserwacje od bieguna gwiazdy,  $i = 0^\circ$ .

Efekt sprzężenia modów  $\ell = 0, p_1$  i  $\ell = 2, g_1, m=0$ ,  
 $\Delta\sigma_0=0.074$  dla modelu  $\log T_{\text{eff}}=4.406, V_{\text{rot}}=100$  km/s.



# Efekt sprzężenia trzech modów $\ell = 0, p_1, \ell = 2, g_1, \ell = 4, g_2, m=0$



**Poprzez sprzężenie rotacyjne mody o wysokich stopniach,  $\ell = 4$  (5), mogą uzyskać znaczącą składowa  $\ell = 0$  (1).**

**Oznacza to, że mogą być wykrywalne  
za pomocą fotometrii naziemnej.**

- ✦ możemy „widzieć” mody o wyższych  $l$
- ✦ pojawia się zależność od aspektu oraz od  $m$

**Identyfikacja modów musi być wykonana jednocześnie z wyznaczeniem parametrów gwiazdowych, rotacji i kąta inklinacji**

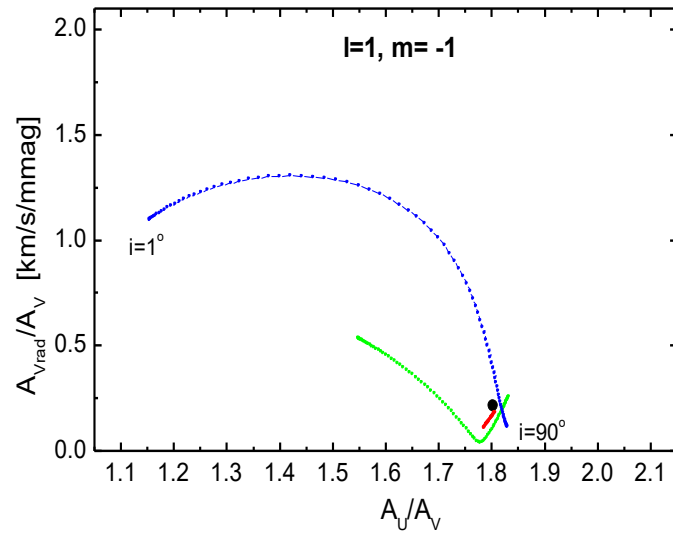
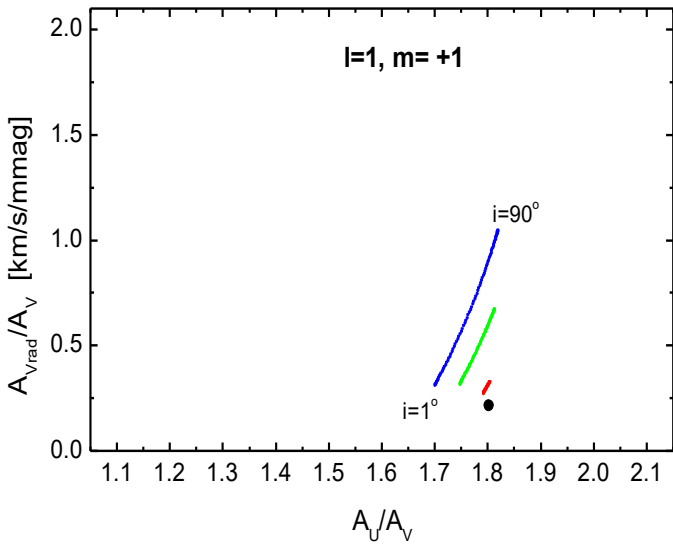
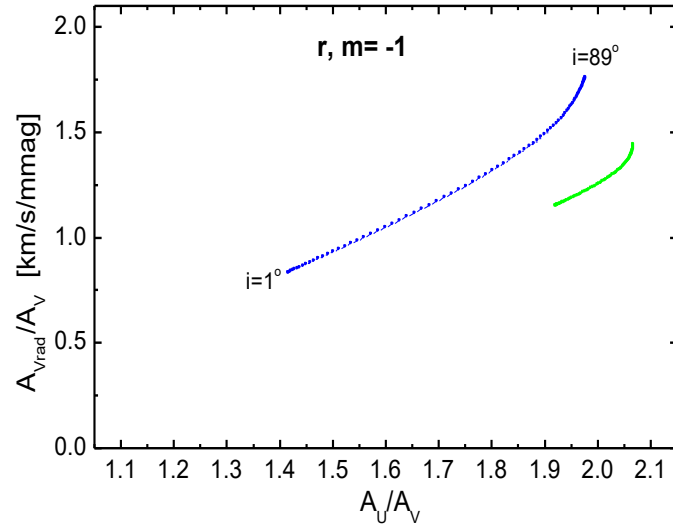
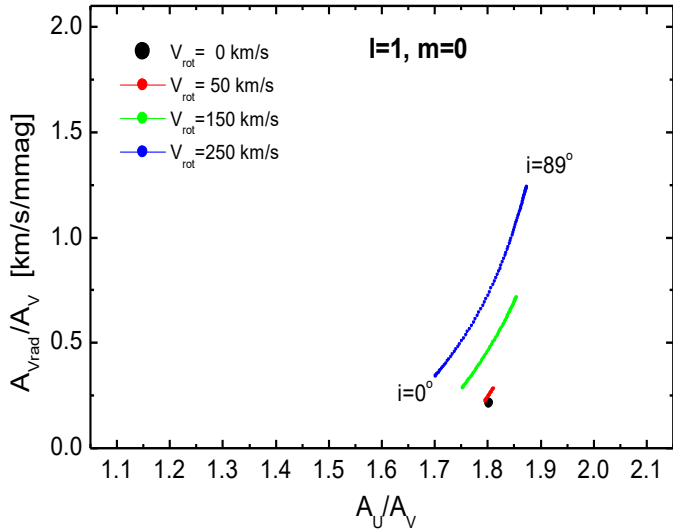
## FOTOMETRYCZNA AMPLITUDA ZESPOLONE MODÓW WOLNYCH ( $\omega \sim \Omega$ )

$$\mathcal{A}_x(i) = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{\ell_j}^m(s) Y_{\ell_j}^m(i, \mathbf{0}) \left[ \mathcal{D}_{\ell_j}^x f + \mathcal{E}_{\ell_j}^x \right]$$

$$\ell_j = \begin{cases} |m| + 2(j-1) & \text{- mody parzyste} \\ |m| + 2(j-1) + 1 & \text{- mody nieparzyste} \end{cases}$$

$$\Theta(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{\ell_j}^m(s) P_{\ell_j}^m(\theta)$$

# $A_{Vrad}/A_V$ vs. $A_U/A_V$





# $A_U/A_V$ vs. $\phi_U - \phi_V$

# $A_{Vrad}/A_V$ vs. $\phi_{Vrad} - \phi_V$

