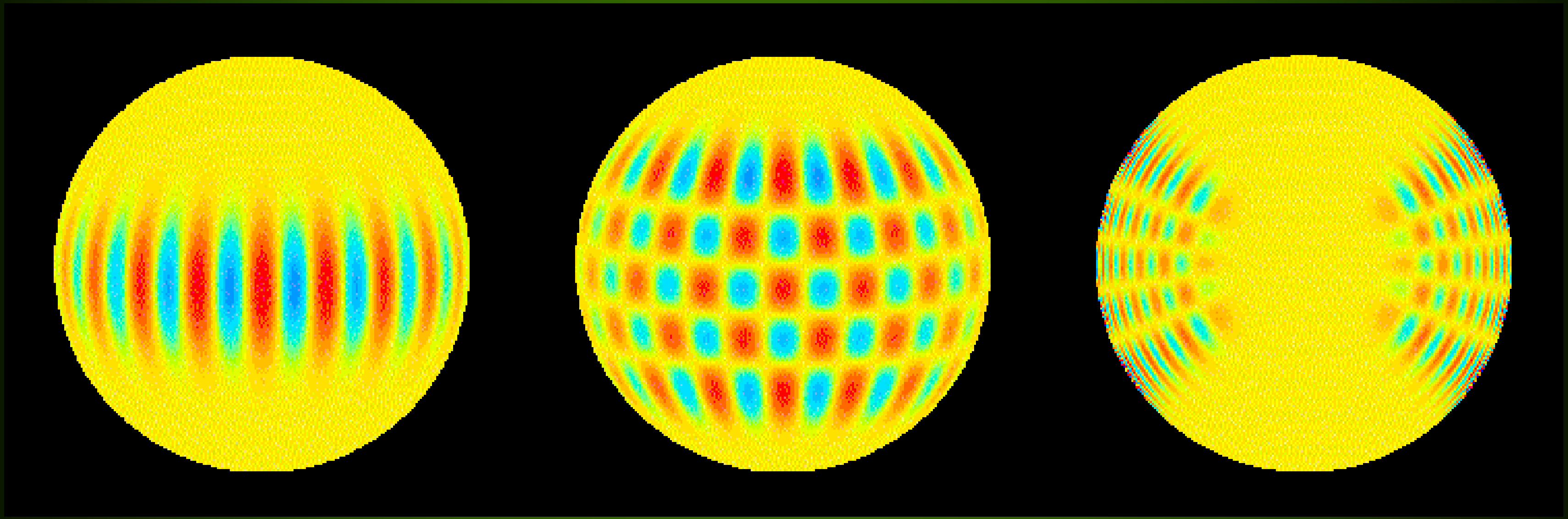


PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2018/2019

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

Strumień promieniowania w danej długości fali, λ

$$\mathcal{F}_\lambda = \int I_\lambda(r, \theta, \phi, \vec{o} \cdot \vec{n}) \vec{o} \cdot \vec{n} \frac{dS}{R^2}.$$

gdzie

$$\vec{o} = (0, 0, 1), \qquad \vec{n} = \left(\frac{\vec{i} dS_x}{|dS|}, \frac{\vec{j} dS_y}{|dS|}, \frac{\vec{k} dS_z}{|dS|} \right),$$

$$\vec{o} \cdot \vec{n} = \frac{dS_z}{|dS|},$$

$$dS_z = \left[R \sin\theta (R\cos\theta + 2\cos\theta\delta r + \sin\theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\delta\theta \right.$$
$$\left. + R^2 \sin\theta \cos\theta \left(\frac{\partial \delta\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial\phi} \right) \right] d\theta d\phi,$$

$$dS = R^2 \sin\theta \left[1 + 2\frac{\delta r}{R} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\delta\theta + \frac{\partial \delta\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial\phi} \right] d\theta d\phi.$$

Zdefiniujmy prawo pociemnienia brzegowego

$$I_\lambda(r, \theta, \phi, \vec{o} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_\lambda(T_{\text{eff}}, \log g) h_\lambda(\tilde{\mu}).$$

$$\int_0^1 h_\lambda \tilde{\mu} d\tilde{\mu} = 1.$$

Zmiany strumień promieniowania gwiazdy pulsującej wynikają ze zmian:

- elementu powierzchni, δdS_z
- pociemnienia brzegowego, δh
- lokalnego strumienia, δF

Zakładamy:

- liniowa nieadiabatyczną teorię pulsacji
- atmosferę płasko-równoległą
- statyczne modele atmosfer

zmiany elementu powierzchni, $\delta dS_z = dS_z - dS_z^0$

Lokalna zmiana natężenia promieniowania

$$\delta I_\lambda = \frac{1}{2\pi}\left(h_\lambda^0 \delta \mathcal{F}_\lambda + \mathcal{F}_\lambda^0 \delta h_\lambda\right),$$

$\delta\mathcal{F}$ **- zmiany lokalnego strumienia**

zmiana całkowitego strumienia

$$\Delta\mathcal{F} = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{F}^0 h^0(\mu)\delta(dS_z) + \frac{1}{2\pi}\int (h^0\delta\mathcal{F} + \mathcal{F}^0\delta h)dS_z^0.$$

zmiany pociemnienia brzegowego, *δh*

$$\delta h_\lambda = \delta h_\lambda^1 + \delta h_\lambda^2 + \delta h_\lambda^3.$$

zmiany *h* powodowane zmianą normalnej do powierzchni

zmiany *h* powodowane zmianą lokalnej grawitacji

zmiany *h* powodowane zmianą lokalnej temperatury

Czyli możemy napisać

$$\delta h_\lambda^1 = \frac{\partial h^0}{\partial \mu}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \delta r}{\partial \theta} - \delta\theta\right)\sin\theta.$$

$$\delta h_\lambda^2 = \frac{1}{\ln 10}\frac{\partial h_\lambda^0}{\partial \log T_{\mathrm{eff}}}\frac{\delta T_{\mathrm{eff}}}{T_{\mathrm{eff}}^0},$$

$$\delta h_\lambda^3 = \frac{1}{\ln 10}\frac{\partial h_\lambda^0}{\partial \log g}\frac{\delta g}{g^0}.$$

Przesunięcie elementu masy (Lagrange'a) dla pojedynczego modu oscylacji w przybliżeniu zerowej rotacji, w układzie współrotującym

$$\vec{\xi}_{n\ell m}(r'', \theta'', \phi'', t) = r''[y_{n\ell m}(r'')Y_\ell^m(\theta'', \phi'')\vec{e}_{r''} + z_{n\ell m}(r'')\vec{\nabla}_H Y_\ell^m(\theta'', \phi'')]\exp(-\mathrm{i}\omega_{n\ell m}t).$$

składowe

$$\xi_r = \delta r,$$

$$\xi_\theta = r\delta\theta,$$

$$\xi_\phi = r\sin\theta\delta\phi.$$

Składowe przesunięcie Lagrange'a we współrotującym układzie odniesienia

$$\delta r''(r'',\theta'',\phi'',t) = r'' y_{n\ell m}(r'') Y_\ell^m(\theta'',\phi'')\exp(-\mathrm{i}\omega_{n\ell m}t),$$

$$\delta\theta''(r'',\theta'',\phi'',t) = z_{n\ell m}(r'')\frac{\partial}{\partial\theta''}Y_\ell^m(\theta'',\phi'')\exp(-\mathrm{i}\omega_{n\ell m}t),$$

$$\delta\phi''(r'',\theta'',\phi'',t) = \frac{z_{n\ell m}(r'')}{\sin^2\theta''}\frac{\partial}{\partial\phi''}Y_\ell^m(\theta'',\phi'')\exp(-\mathrm{i}\omega_{n\ell m}t),$$

Składowe przesunięcie Lagrange'a w układzie nieruchomym

$$\delta r'(r', \theta', \phi', t) = r' y_{n\ell m}(r') Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(-\mathrm{i}\omega_{n\ell m} t),$$

$$\delta \theta'(r', \theta', \phi', t) = z_{n\ell m}(r') \frac{\partial}{\partial \theta'} Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(-\mathrm{i}\omega_{n\ell m} t),$$

$$\delta \phi'(r', \theta', \phi', t) = \frac{z_{n\ell m}(r')}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'} Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(-\mathrm{i}\omega_{n\ell m} t).$$

Korzystając z macierzy transformacji D (wykład 1) oraz zależności

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\delta\theta' + \frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\delta\phi',$$

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\delta\theta' + \frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\delta\phi',$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta'} = \frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi'} = \frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\sin\theta' = N(\theta,\phi)\sin\theta.$$

Składowe przesunięcie Lagrange'a w układzie obserwatora

$$\delta r(r,\theta,\phi,t) = r y_{n\ell m}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_\ell^k(\theta,\phi)\exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t), \quad (3.25a)$$

$$\delta\theta(r,\theta,\phi,t) = z_{n\ell m}(r)\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_\ell^k(\theta,\phi)\exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t)$$

$$+\frac{z_{n\ell m}(r)}{\sin^2\theta\ N^2(\theta,\phi)}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_\ell^k(\theta,\phi)\exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t), \quad (3.25b)$$

$$\delta\phi(r,\theta,\phi,t) = z_{n\ell m}(r)\left[\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\phi}\right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_\ell^k(\theta,\phi)\exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t)$$

$$+\frac{z_{n\ell m}(r)}{\sin^2\theta\ N^2(\theta,\phi)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\phi}\right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_\ell^k(\theta,\phi)\exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t). \quad (3.25c)$$

Ponieważ grupa obrotów wokół kątów Eulera jest ortonormalna zachodzą następujące relacje

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta\ N^2(\theta,\phi)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta\ N^2(\theta,\phi)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} + \frac{1}{\sin^2\theta\ N^2(\theta,\phi)}\frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\frac{\partial\phi}{\partial\phi'} = 0.$$

Dostajemy składowe przesunięcie Lagrange'a w układzie obserwatora

$$\delta r(r,\theta,\phi,t) = r y_{n\ell m}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_\ell^k(\theta,\phi) \exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t),$$

$$\delta\theta(r,\theta,\phi,t) = z_{n\ell m}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) \frac{\partial Y_\ell^k(\theta,\phi)}{\partial\theta} \exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t),$$

$$\delta\phi(r,\theta,\phi,t) = \frac{z_{n\ell m}(r)}{\sin^2\theta} \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) \frac{\partial Y_\ell^k(\theta,\phi)}{\partial\phi} \exp(-\mathrm{i}(\omega_{n\ell m} - m\Omega)t).$$

ZMIANY STRUMIENIA BOLOMETRYCZNEGO

Dziembowski (1977) AcA 27, 203

Zakładamy atmosferę szarą: $\delta h = \delta h_1, \ \delta h_2 = \delta h_3 = 0$

Wstawiając wyrażenia na dS_z^0, δdS_z i δh dostaniemy ogólne wyrażenie na zmianę całkowitego strumienia

$$\frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} = \frac{1}{2\pi}\int\int 2h^0 \sin\theta\cos\theta\frac{\delta r}{R}d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi}\int\int h^0\sin^2\theta\frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta}d\theta d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int h^0(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\delta\theta d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi}\int\int h^0\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial\delta\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\delta\phi}{\partial\phi}\right)d\theta d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\partial h^0}{\partial\mu}\sin^2\theta\cos\theta\frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta}d\theta d\phi - \frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\partial h^0}{\partial\mu}\sin^2\theta\cos\theta\delta\theta d\theta d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int h^0\frac{\delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0}\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi.$$

Licząc krzywa blasku możemy wycałkować po tarczy gwiazdy. Wówczas całki zawierające $\delta\theta$ i $\delta\varphi$ wyzerują się

$$\frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} = \frac{1}{2\pi}\int\int 2h^0 \sin\theta\cos\theta\frac{\delta r}{R}d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi}\int\int h^0 \sin^2\theta\frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta}d\theta d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\partial h^0}{\partial\mu}\sin^2\theta\cos\theta\frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta}d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi}\int\int h^0\frac{\delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0}\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi.$$

Zadanie: Pokazać to. Scałkować przez części całki zawierające $\delta\theta$ i $\delta\varphi$.

Lokalna zmiana strumienia ma postać

$$\frac{\delta\mathcal{F}_{\rm bol}}{\mathcal{F}_{\rm bol}} = {\rm Re}\{\varepsilon f Y_\ell^m {\rm e}^{-{\rm i}\omega t}\},$$

f **- względna zmiana strumienia do przesunięcia radialnego na poziomie fotosfery**

Możemy przyjąć y_I=0 oraz normalizację y_R=1

Wstawiamy $\delta r/R$ i $\delta\mathcal{F}/\mathcal{F}$ i przechodzimy do układu obserwatora oraz korzystamy z tego, że

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi} d\phi = 0.$$

Pod całkami zostaną tylko wielomiany Legendre'a, P_ℓ

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_l^m}{\mathrm{d}x} = lxP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x)$$

m=0

$$b_\ell^\lambda = \int_0^1 h_\lambda^0 \mu P_\ell d\mu,$$

$$c_\ell = l\int_0^1 (h_\lambda^0 + \mu\frac{dh_\lambda^0}{d\mu})(P_{l-1} - \mu P_\ell) d\mu.$$

$$2b_\ell^\lambda - c_\ell^\lambda = b_\ell^\lambda(2+\ell)(1-\ell)$$

Ostatecznie otrzymamy

$$\boxed{\frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} = \varepsilon Y_\ell^m(i,0) b_\ell \mathrm{Re}\left\{[(2+\ell)(1-\ell)+f]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}}$$

$$b_l = \int_0^1 h\mu P_l d\mu,$$

$$Y_\ell^m(i,0) = N_\ell^0 d_{\ell m 0}(i).$$

$$d_{\ell m 0}(i) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^m(\cos i).$$

ZMIANA STRUMIENIA MONOCHROMATYCZNEGO

Uwzględniamy wszystkie wyrazy w *δh*

$$\frac{\Delta\mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_\lambda^0} = \frac{1}{2\pi}\int\int 2h_\lambda^0 \sin\theta\cos\theta\frac{\delta r}{R}d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi}\int\int h_\lambda^0 \sin^2\theta\frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta}d\theta d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\partial h_\lambda^0}{\partial\mu}\sin^2\theta\cos\theta\frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta}d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi}\int\int h_\lambda^0\frac{\delta\mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_\lambda^0}\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int(\delta h_\lambda^2 + \delta h_\lambda^3)\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi.$$

Lokalna zmiana strumienia

$$\frac{\delta \mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}^0_\lambda} = \frac{\partial \log \mathcal{F}^0_\lambda}{\partial \log T^0_{\rm eff}} \frac{\delta T_{\rm eff}}{T_{\rm eff}} + \frac{\partial \log \mathcal{F}^0_\lambda}{\partial \log g^0} \frac{\delta g}{g^0} = \alpha_T(\lambda) \frac{\delta T_{\rm eff}}{T^0_{\rm eff}} + \alpha_g(\lambda) \frac{\delta g}{g^0}.$$

gdzie

$$\frac{\delta T_{\rm eff}}{T^0_{\rm eff}} = \varepsilon \frac{1}{4} {\rm Re}\{f Y^m_\ell {\rm e}^{-{\rm i}\omega t}\},$$

$$\frac{\delta g_{\rm eff}}{g^0_{\rm eff}} = -\left(2 + \frac{3\omega^2}{4\pi G <\rho>}\right) \frac{\delta r}{R},$$

ZMIANA STRUMIENIA MONOCHROMATYCZNEGO

$$\frac{\Delta\mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_\lambda^0} = \varepsilon Y_\ell^m(i,0)\, b_\ell^\lambda \mathrm{Re}\{[D_{1,\ell}^\lambda + D_{2,\ell} + D_{3,\ell}^\lambda]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\},$$

gdzie

$$D_{1,\ell}^\lambda = \frac{1}{4} f \frac{\partial \log(\mathcal{F}_\lambda |b_\ell^\lambda|)}{\partial \log T_{\mathrm{eff}}},$$

$$D_{2,\ell} = (2+\ell)(1-\ell),$$

$$D_{3,\ell}^\lambda = -\left(\frac{3\omega^2}{4\pi G <\rho>} + 2\right) \frac{\partial \log(\mathcal{F}_\lambda |b_\ell^\lambda|)}{\partial \log g_{\mathrm{eff}}^0}$$

D_1 – **zmiany jasności i pociemnienia brzegowego wynikające ze zmian temperaturowych**

D_2 – **zmiany geometryczne**

D_3 – **zmiany jasności i pociemnienia brzegowego wynikające ze zmian przyspieszenia grawitacyjnego (ciśnienia)**

Do wyliczenia pochodnych strumienia po temperaturze i grawitacji: $\alpha_T(\lambda)$, $\alpha_g(\lambda)$, oraz pociemnienia brzegowego i jego pochodnych korzystamy z modeli atmosfer gwiazdowych, np:

modele Kurucza (std, NOVER, NEWODF)

PHEONIX (Peter Hauschildt) – uwzględniają linie molekuł

NEMO2003 (zespół z Uniwersytetu Wiedeńskiego) – uwzględniają konwekcję turbulentną

BSTAR2006 – modele atmosfer NLTE TLUSTY

Pochodne $\alpha_T(\lambda)$ i $\alpha_g(\lambda)$ dla trzech wartości T_{eff} (modele atmosfer Kurucza)

logT_{eff}	log$g$	*atu*	*agu*	*atv*	*agv*	*atb*	*agb*	*aty*	*agy*
8000.	4.00	4.14097	0.07240	5.36410	-0.05720	4.59780	-0.03280	3.66940	-0.01320
15000.	4.00	3.03250	-0.01520	1.87891	-0.01160	1.73385	-0.00080	1.63714	-0.00200
24000.	4.00	2.76310	-0.04560	1.98943	-0.02560	1.88996	-0.02000	1.83470	-0.02320

Ponadto dla pociemnienia brzegowego możemy skorzystać z przybliżeń analitycznych, np:

LINIOWE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u(1-\mu)$$

KWADRATOWE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - a(1-\mu) - b(1-\mu)^2$$

Inne prawa pociemnienia brzegowego

PIERWIASTKOWE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - c(1-\mu) - d(1-\sqrt{\mu})$$

LOGARYTMICZNE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - e(1-\mu) - f\mu \ln \mu$$

NIELINIOWE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - \sum_{k=1}^{4} a_k (1-\mu^{\frac{k}{2}})$$

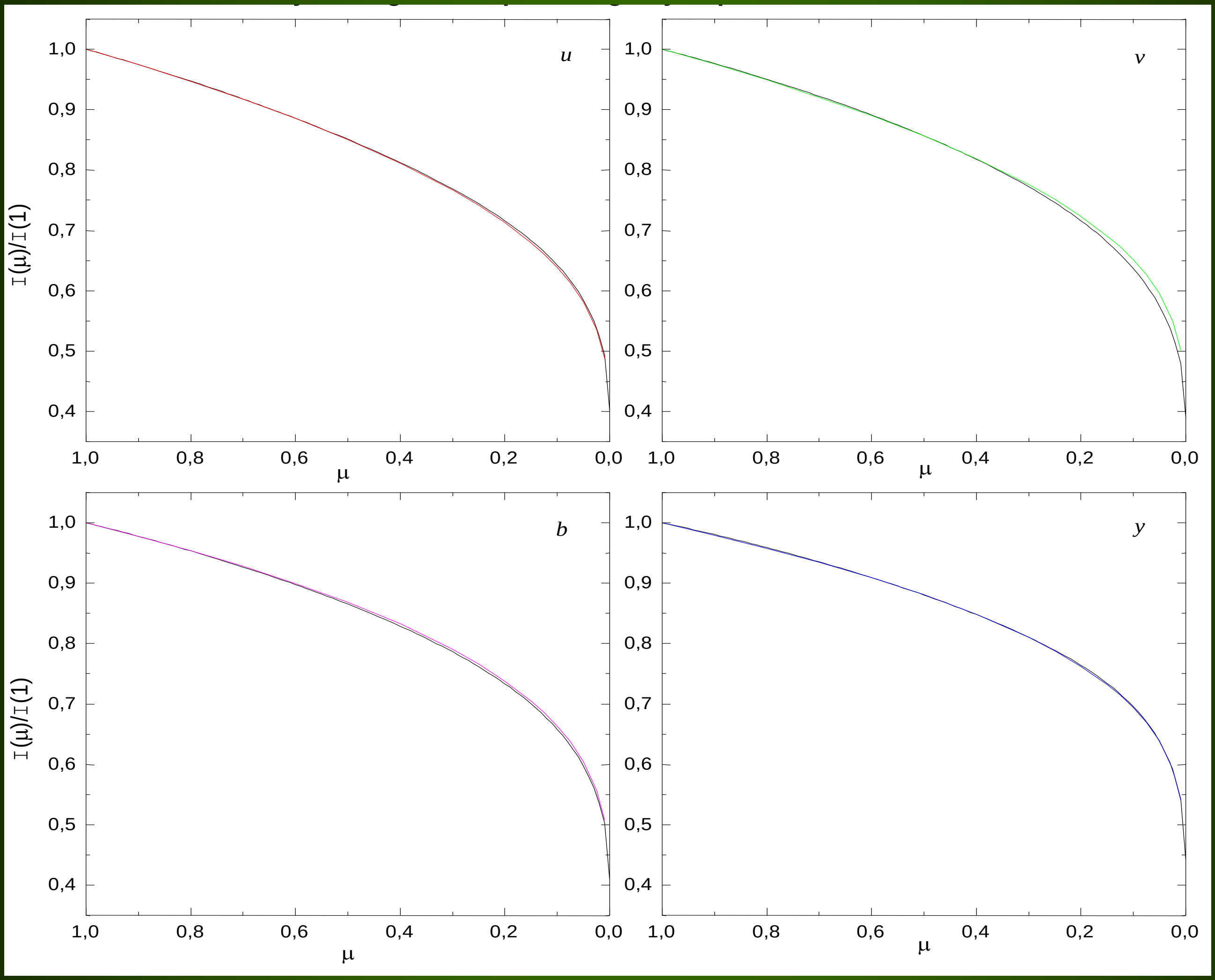
DWUPARAMETRYCZNE (EKSPONENCJALNE)

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - g(1-\mu) - \frac{h}{(1-\mathrm{e}^{\mu})}$$

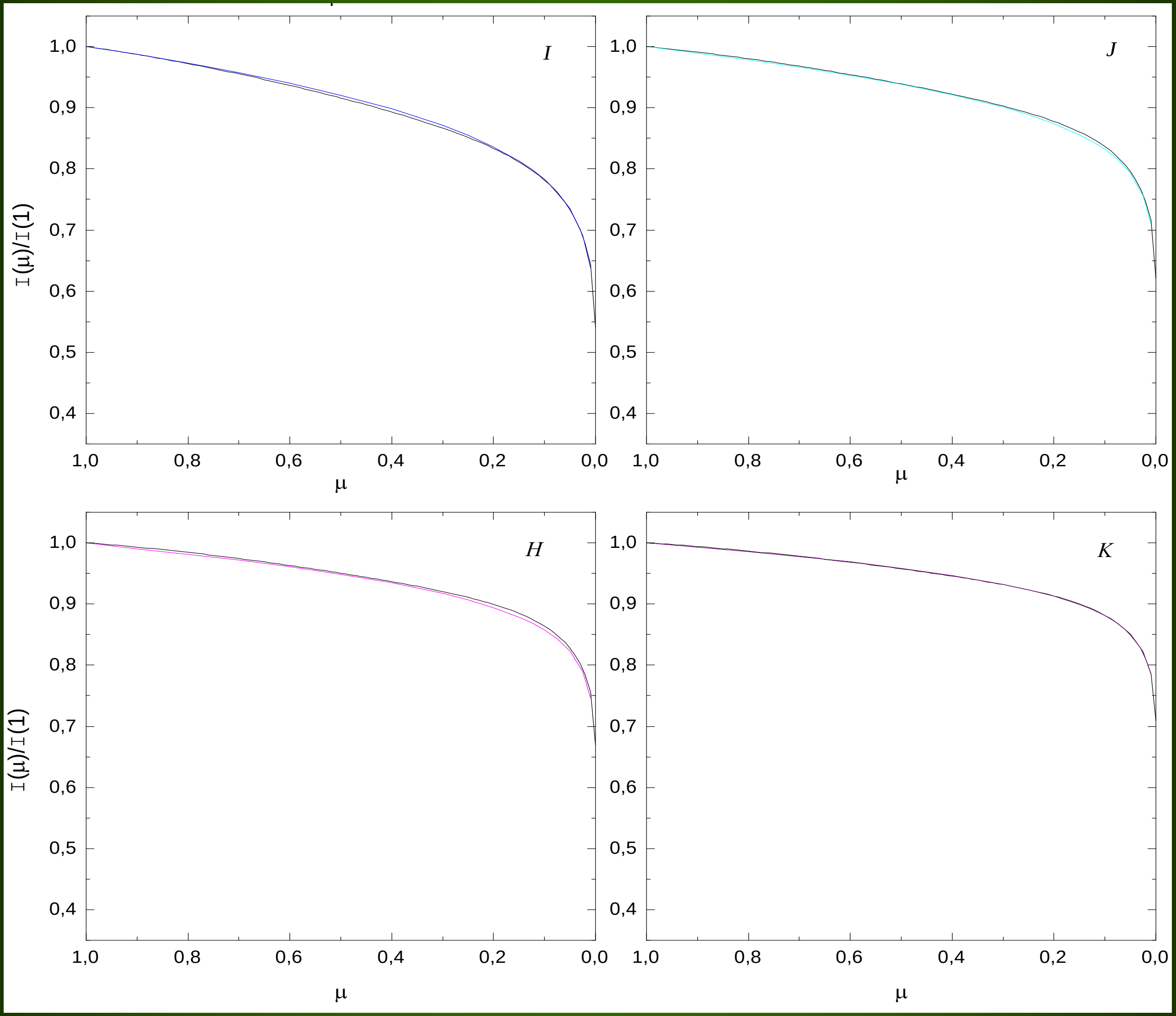
log T_{eff} =25000, log g=4.0, [m/H]=0.0, ξ=2 km/s

$I(\mu)/I(1) = 1 - \Sigma_1^4\, a_k\, (1- \mu^{k/2})$ dla fotometrii uvby

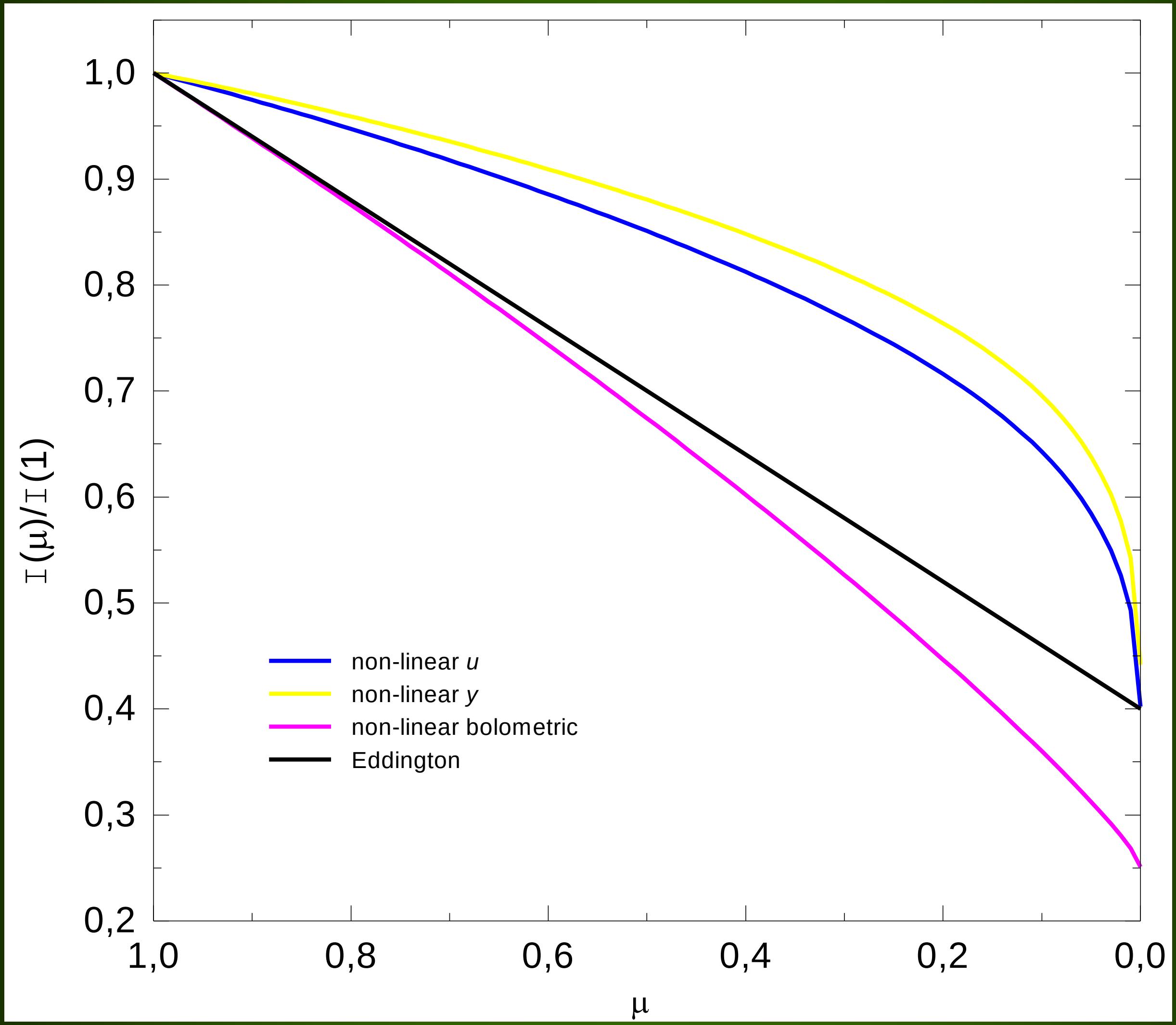
Kolorami wyrysowane są dokładne wartości $I(\mu)/I(1)$ z modeli Kurucza



To samo dla fotometrii Johnsona IJHK



prawo nieliniowe w pasmach u i y, bolometryczne oraz Eddingtona



POLE PRĘDKOŚCI PULSACJI

Pole prędkości znajdziemy licząc pochodną po czasie przesunięcia Lagrange'a we współrotującym układzie odniesienia

$$\frac{d\vec{\xi}_{n\ell m}(r'',\theta'',\phi'',t)}{dt} = \frac{\partial\vec{\xi}_{n\ell m}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\xi}_{n\ell m}}{\partial r''}\frac{\partial r''}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\xi}_{n\ell m}}{\partial \theta''}\frac{\partial \theta''}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\xi}_{n\ell m}}{\partial \phi''}\frac{\partial \phi''}{\partial t},$$

$$\vec{v}_{puls} = \Re\{\mathrm{i}\omega_{n\ell m}\vec{\xi}_{n\ell m}(r'',\theta'',\phi'',t)\}.$$

Lokalna zmiana promienia związana z modem oscylacji

$$\delta r = \varepsilon R \Re \left[\sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k} Y_\ell^k(\theta, \phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \right]$$

składowa prędkości w kierunku r przy zaniedbaniu rotacji

$$v_r = \frac{\partial \delta r}{\partial t}$$

$$v_r = -\varepsilon \omega \Im \left[\sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k} Y_\ell^k(\theta, \phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \right]$$

zewnętrzne warunki brzegowe prowadzą do wyrażenia na składową horyzontalną

$$\vec{v}_H \approx \alpha_H \vec{\nabla}_H v_r$$

$$\alpha_H = \frac{GM}{R^3\omega^2} = \frac{1}{3\sigma^2}$$

$$v_\theta = \alpha_H \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \qquad v_\phi = \frac{\alpha_H}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi},$$

Wektor jednostkowy w kierunku obserwatora (cosθ, -sinθ, 0), więc radialna składowa w układzie obserwatora wynosi

$$v_{rad} = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta$$

$$v_p = \vec{v}_{puls} \cdot (-\mathbf{e}_z) = -\mathrm{i}\omega[\cos\theta\delta r - r\sin\theta\delta\theta] = -\mathrm{i}\omega[\cos\theta\xi_r - \sin\theta\xi_\theta].$$

$$\xi_r = \delta r,$$

$$\xi_\theta = r\delta\theta,$$

$$\xi_\phi = r\sin\theta\delta\phi.$$

Całkowita prędkość rzutowana na kierunek do obserwatora w danym miejscu na tarczy gwiazdy jest suma prędkości pulsacji i rotacji

$$v_{rad} = v_p - v_e \sin i \sin\theta \sin\varphi$$

Prędkość radialna uśredniona po widzialnym dysku z uwzględnieniem pociemnienia brzegowego

$$V_{rad} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{rad}(\theta, \varphi) d\varphi \right] h(\mu) \mu d\mu = \int_0^1 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_p(\theta, \varphi) d\varphi \right] h(\mu) \mu d\mu$$

ZMIANY PRĘDKOŚCI RADIALNEJ

Po scałkowaniu dostaniemy

$$V_{rad} = -\mathrm{i}\varepsilon\omega R N_l^0 d_{\ell m0}(i)(u_\ell + \alpha_H v_\ell)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$u_\ell = \int_0^1 h\mu^2 P_\ell(\mu) d\mu,$$

$$v_\ell = \ell \int_0^1 h(P_{\ell-1} - \mu P_\ell)\mu d\mu,$$

$$u_\ell^\lambda = \frac{1}{2\ell+1}[(\ell+1)b_{\ell+1}^\lambda + \ell b_{\ell-1}^\lambda]$$

$$v_\ell^\lambda = \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}[b_{\ell-1}^\lambda - b_{\ell+1}^\lambda]$$

Dziembowski (1977) AcA 27, 203

Z obserwacji prędkość radialną pulsacji wyznaczamy jako pierwszy moment wybranej linii widmowej

$$M_1 = \frac{\int (v - v_0) F(v) dv}{\int F(v) dv}$$

υ_0 – odpowiada λ_0

Dla gwiazd znamy tylko uśrednione po tarczy charakterystyki modów oscylacji.

Prowadzi to do ograniczeń w obserwowalności modów wynikających z efektów uśredniania oraz kąta inklinacji.

EFEKTY UŚREDNIANIA

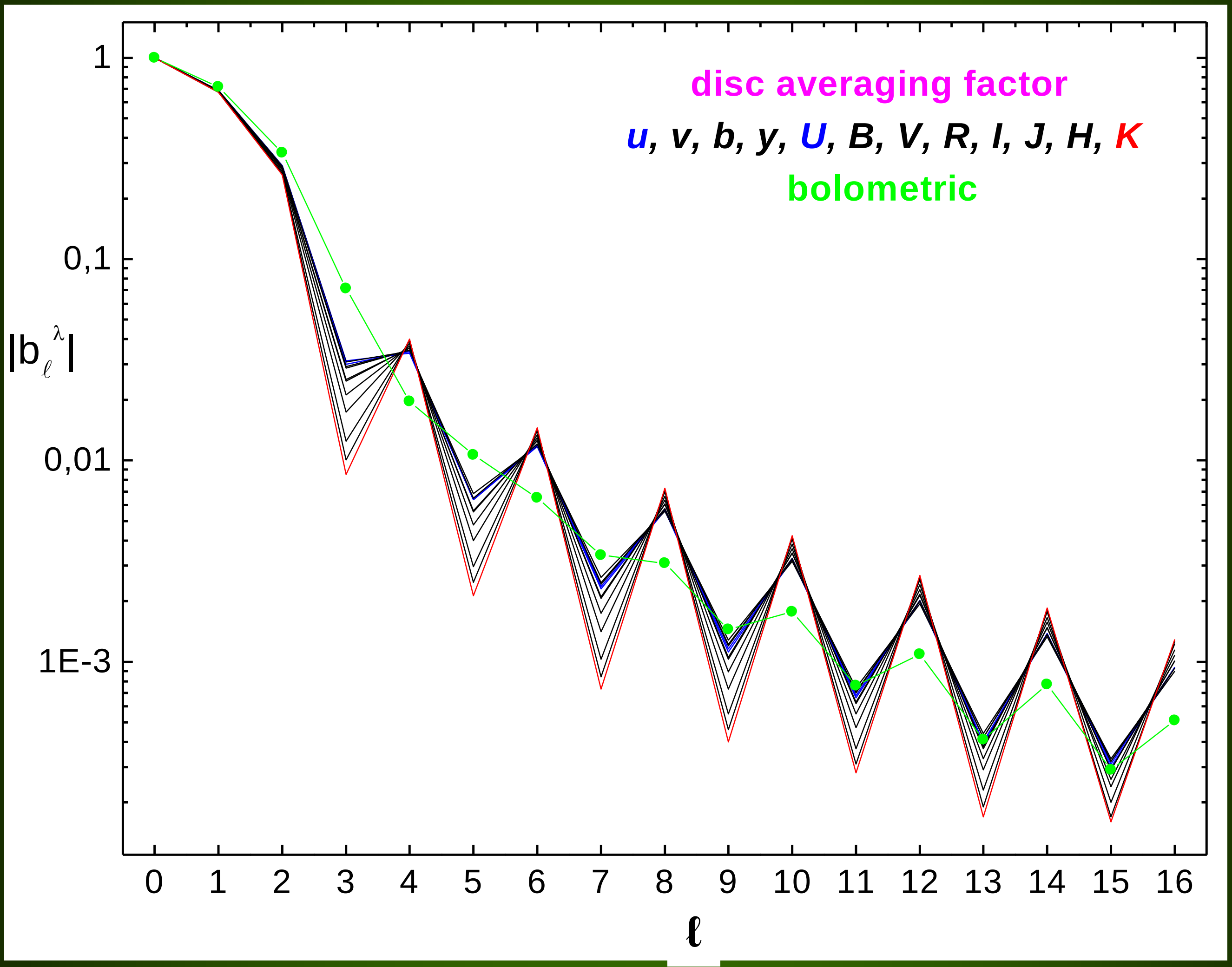
Całki $_\ell$, u_ℓ, v_ℓ szybko maleją z rosnącym ℓ.

ℓ	b_ℓ	u_ℓ	v_ℓ
0	1.0	0.708	0.0
1	0.708	0.550	0.450
2	0.325	0.321	0.775
3	0.0626	0.127	0.594
4	-0.0208	0.0234	0.156
5	-0.00782	-0.00521	-0.0117
6	0.00781	-0.00234	-0.0319
7	0.00234	0.00156	0.0437
8	-0.00391	0.00059	0.0141

Efekty uśredniania w zmianach jasności opisuje czynnik b_ℓ , zwany „the disc averaging factor”.

Przy obecnym poziomie detekcji z fotometrii naziemnej możemy wykryć tylko mody o $\ell \leq 4$.

czynnik uśredniania po dysku w różnych pasmach



Wyrażenia na b_ℓ, u_ℓ, v_ℓ sprowadzają się do całek:

$$\boxed{J_{\ell,k} = \int_0^1 \mu^k P_\ell \, d\mu}$$

$$\int_0^1 \mu^k P_\ell(\mu) d\mu = \frac{1}{2^\ell} \sum_{n=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^n (2\ell - 2n)!}{n!(\ell - n)!(\ell - 2n)!} \cdot \frac{1}{\ell - 2n + k + 1}$$

Całki te znikają dla $\ell > k$, jeśli różnica $\ell - k$ jest parzysta.

Jeśli jest nieparzysta, to dla $\ell \to \infty$ mamy

$$J_{\ell,k} \to (-1)^{(\ell - k - 1)/2} k! \, \ell^{-(k+1.5)} (2/\pi)^{1/2}$$

Dlatego dla dużych ℓ wartości b_ℓ, u_ℓ, v_ℓ zależą od parzystości

ℓ parzyste

$$b_\ell = c_\ell / \ell^2 \quad u_\ell = -9c_\ell / \ell^4 \quad v_\ell = -3c_\ell / \ell^2$$

$$c_\ell = (-1)^{(\ell/2+1)} [2/(\pi \ell)]^{1/2}$$

ℓ nieparzyste

$$b_\ell = c_\ell / \ell^2 \quad u_\ell = 2c_\ell / (3\ell^2) \quad v_\ell = c_\ell /3$$

$$c_\ell = (-1)^{(\ell/2+1)} [2/(\pi \ell)]^{1/2}$$

b_l^{λ} w paśmie y, nieliniowe $h_{\lambda}(\mu)$ (Claret)

b_l^{λ} - $h(\mu)$ Eddingtona ($h(\mu) = 1.5\mu+1$)

b_l^{λ} - $h(\mu)$ Eddingtona, wzór dla dużych ℓ