

# PULSACJE GWIAZDOWE

semestr zimowy 2017/2018

Jadwiga Daszyńska-Daszkiewicz

**Strumień promieniowania w danej długości fali,  $\lambda$**

$$\mathcal{F}_\lambda = \int I_\lambda(r, \theta, \phi, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \frac{dS}{R^2}.$$

**gdzie**

$$\vec{\sigma} = (0, 0, 1), \quad \vec{n} = \left( \frac{\vec{i}dS_x}{|dS|}, \frac{\vec{j}dS_y}{|dS|}, \frac{\vec{k}dS_z}{|dS|} \right),$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \frac{dS_z}{|dS|},$$

$$dS_z = \left[ R \sin \theta (R \cos \theta + 2 \cos \theta \delta r + \sin \theta \frac{\partial \delta r}{\partial \theta}) + R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \delta \theta \right. \\ \left. + R^2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) \right] d\theta d\phi,$$

$$dS = R^2 \sin \theta \left[ 1 + 2 \frac{\delta r}{R} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \delta \theta + \frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right] d\theta d\phi.$$

**Zdefiniujmy prawo pociemnienia brzegowego**

$$I_\lambda(r, \theta, \phi, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_\lambda(T_{\text{eff}}, \log g) h_\lambda(\tilde{\mu}).$$

$$\int_0^1 h_\lambda \tilde{\mu} d\tilde{\mu} = 1.$$

## Zmiany strumień promieniowania gwiazdy pulsującej wynikają ze zmian:

- elementu powierzchni,  $\delta dS_z$
- pociemnienia brzegowego,  $\delta h$
- lokalnego strumienia,  $\delta F$

## **Zakładamy:**

- ◆ **liniowa nieadiabatyczną teorię pulsacji**
  - ◆ **atmosferę płasko-równoległą**
  - ◆ **statyczne modele atmosfer**

zmiany elementu powierzchni,  $\delta dS_z = dS_z - dS_z^0$

**Lokalna zmiana natężenia promieniowania**

$$\delta I_\lambda = \frac{1}{2\pi} (h_\lambda^0 \delta \mathcal{F}_\lambda + \mathcal{F}_\lambda^0 \delta h_\lambda),$$

$\delta \mathcal{F}$  - zmiany lokalnego strumienia

## zmiana całkowitego strumienia

$$\Delta\mathcal{F} = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{F}^0 h^0(\mu) \delta(dS_z) + \frac{1}{2\pi} \int (h^0 \delta\mathcal{F} + \mathcal{F}^0 \delta h) dS_z^0.$$

## zmiany pociemnienia brzegowego, $\delta h$

$$\delta h_\lambda = \delta h_\lambda^1 + \delta h_\lambda^2 + \delta h_\lambda^3.$$

zmiany  $h$  powodowane  
zmianą normalnej  
do powierzchni

zmiany  $h$  powodowane  
zmianą lokalnej grawitacji

zmiany  $h$  powodowane  
zmianą lokalnej temperatury

**Czyli możemy napisać**

$$\delta h_{\lambda}^1 = \frac{\partial h^0}{\partial \mu} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \delta r}{\partial \theta} - \delta \theta \right) \sin \theta.$$

$$\delta h_{\lambda}^2 = \frac{1}{\ln 10} \frac{\partial h_{\lambda}^0}{\partial \log T_{\text{eff}}} \frac{\delta T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}^0},$$

$$\delta h_{\lambda}^3 = \frac{1}{\ln 10} \frac{\partial h_{\lambda}^0}{\partial \log g} \frac{\delta g}{g^0}.$$

**Przesunięcie elementu masy (Lagrange'a) dla pojedynczego modu oscylacji w przybliżeniu zerowej rotacji, w układzie współrotującym**

$$\vec{\xi}_{nlm}(r'', \theta'', \phi'', t) = r'' [y_{nlm}(r'') Y_\ell^m(\theta'', \phi'') \vec{e}_{r''} + z_{nlm}(r'') \vec{\nabla}_H Y_\ell^m(\theta'', \phi'')] \exp(-i\omega_{nlm} t).$$

**składowe**

$$\xi_r = \delta r,$$

$$\xi_\theta = r \delta \theta,$$

$$\xi_\phi = r \sin \theta \delta \phi.$$

## Składowe przesunięcie Lagrange'a we współrotującym układzie odniesienia

$$\delta r''(r'', \theta'', \phi'', t) = r'' y_{nlm}(r'') Y_\ell^m(\theta'', \phi'') \exp(-i\omega_{nlm}t),$$

$$\delta \theta''(r'', \theta'', \phi'', t) = z_{nlm}(r'') \frac{\partial}{\partial \theta''} Y_\ell^m(\theta'', \phi'') \exp(-i\omega_{nlm}t),$$

$$\delta \phi''(r'', \theta'', \phi'', t) = \frac{z_{nlm}(r'')}{\sin^2 \theta''} \frac{\partial}{\partial \phi''} Y_\ell^m(\theta'', \phi'') \exp(-i\omega_{nlm}t),$$

## Składowe przesunięcie Lagrange'a w układzie nieruchomym

$$\delta r'(r', \theta', \phi', t) = r' y_{nlm}(r') Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(-i\omega_{nlm}t),$$

$$\delta \theta'(r', \theta', \phi', t) = z_{nlm}(r') \frac{\partial}{\partial \theta'} Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(-i\omega_{nlm}t),$$

$$\delta \phi'(r', \theta', \phi', t) = \frac{z_{nlm}(r')}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'} Y_\ell^m(\theta', \phi' - \Omega t) \exp(-i\omega_{nlm}t).$$

**Korzystając z macierzy transformacji D (wykład 1) oraz zależności**

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\delta\theta' + \frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\delta\phi',$$

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\delta\theta' + \frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\delta\phi',$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta'} = \frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi'} = \frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\sin\theta' = N(\theta, \phi)\sin\theta.$$

## Składowe przesunięcie Lagrange'a w układzie obserwatora

$$\delta r(r, \theta, \phi, t) = r y_{nlm}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t), \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned} \delta\theta(r, \theta, \phi, t) = & z_{nlm}(r) \left[ \left( \frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t) \\ & + \frac{z_{nlm}(r)}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left[ \left( \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t), \end{aligned} \quad (3.25b)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi(r, \theta, \phi, t) = & z_{nlm}(r) \left[ \frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \frac{\partial}{\partial\theta} + \left( \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t) \\ & + \frac{z_{nlm}(r)}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left[ \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} \frac{\partial}{\partial\theta} + \left( \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell mk}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t). \end{aligned} \quad (3.25c)$$

**Ponieważ grupa obrotów wokół kątów Eulera jest ortonormalna zachodzą następujące relacje**

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi'}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi'}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \frac{\partial\phi}{\partial\theta'} + \frac{1}{\sin^2\theta N^2(\theta, \phi)} \frac{\partial\theta}{\partial\phi'} \frac{\partial\phi}{\partial\phi'} = 0.$$

**Dostajemy składowe przesunięcie Lagrange'a w układzie obserwatora**

$$\delta r(r, \theta, \phi, t) = r y_{nlm}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) Y_{\ell}^k(\theta, \phi) \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t),$$

$$\delta \theta(r, \theta, \phi, t) = z_{nlm}(r) \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) \frac{\partial Y_{\ell}^k(\theta, \phi)}{\partial \theta} \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t),$$

$$\delta \phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{z_{nlm}(r)}{\sin^2 \theta} \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k}(i) \frac{\partial Y_{\ell}^k(\theta, \phi)}{\partial \phi} \exp(-i(\omega_{nlm} - m\Omega)t).$$

# ZMIANY STRUMIENIA BOLOMETRYCZNEGO

Dziembowski (1977) AcA 27, 203

Zakładamy atmosferę szarą:  $\delta h = \delta h_1$ ,  $\delta h_2 = \delta h_3 = 0$

**Wstawiając wyrażenia na  $dS_z^0$ ,  $\delta dS_z$  i  $\delta h$  dostaniemy ogólne wyrażenie na zmianę całkowitego strumienia**

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} &= \frac{1}{2\pi} \int \int 2h^0 \sin \theta \cos \theta \frac{\delta r}{R} d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi} \int \int h^0 \sin^2 \theta \frac{\partial \delta r / R}{\partial \theta} d\theta d\phi \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int \int h^0 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \delta \theta d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi} \int \int h^0 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial \delta \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\partial h^0}{\partial \mu} \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial \delta r / R}{\partial \theta} d\theta d\phi - \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\partial h^0}{\partial \mu} \sin^2 \theta \cos \theta \delta \theta d\theta d\phi \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int \int h^0 \frac{\delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi.
 \end{aligned}$$

Licząc krzywa blasku możemy wycalkować po tarczy gwiazdy. Wówczas całki zawierające  $\delta\theta$  i  $\delta\phi$  wyzerują się

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} &= \frac{1}{2\pi} \int \int 2h^0 \sin\theta \cos\theta \frac{\delta r}{R} d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi} \int \int h^0 \sin^2\theta \frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta} d\theta d\phi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\partial h^0}{\partial\mu} \sin^2\theta \cos\theta \frac{\partial\delta r/R}{\partial\theta} d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi} \int \int h^0 \frac{\delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

**Zadanie:** Pokazać to. Scałkować przez części całki zawierające  $\delta\theta$  i  $\delta\phi$ .

**Lokalna zmiana strumienia ma postać**

$$\frac{\delta \mathcal{F}_{\text{bol}}}{\mathcal{F}_{\text{bol}}} = \text{Re}\{\varepsilon f Y_{\ell}^m e^{-i\omega t}\},$$

*f* - względna zmiana strumienia do przesunięcia radialnego na poziomie fotosfery

**Możemy przyjąć  $y_I=0$  oraz normalizację  $y_R=1$**

Wstawiamy  $\delta r/R$  i  $\delta \mathcal{F}/\mathcal{F}$  i przechodzimy do układu obserwatora oraz korzystamy z tego, że

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\phi} d\phi = 0.$$

Pod całkami zostaną tylko wielomiany Legendre'a,  $P_\ell$

$$(1 - x^2) \frac{dP_\ell^m}{dx} = lxP_\ell^m(x) - (l + m)P_{\ell-1}^m(x) \quad m=0$$

$$b_\ell^\lambda = \int_0^1 h_\lambda^0 \mu P_\ell d\mu,$$

$$c_\ell = l \int_0^1 \left( h_\lambda^0 + \mu \frac{dh_\lambda^0}{d\mu} \right) (P_{\ell-1} - \mu P_\ell) d\mu.$$

$$2b_\ell^\lambda - c_\ell^\lambda = b_\ell^\lambda (2 + \ell)(1 - \ell)$$

## Ostatecznie otrzymamy

$$\frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}^0} = \varepsilon Y_\ell^m(i, 0) b_\ell \operatorname{Re} \left\{ [(2 + \ell)(1 - \ell) + f] e^{-i\omega t} \right\}$$

$$b_\ell = \int_0^1 h\mu P_\ell d\mu,$$

$$Y_\ell^m(i, 0) = N_\ell^0 d_{\ell m 0}(i).$$

$$d_{\ell m 0}(i) = \sqrt{\frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!}} P_\ell^m(\cos i).$$

# ZMIANA STRUMIENIA MONOCHROMATYCZNEGO

Uwzględniamy wszystkie wyrazy w  $\delta h$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_\lambda^0} &= \frac{1}{2\pi} \int \int 2h_\lambda^0 \sin \theta \cos \theta \frac{\delta r}{R} d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi} \int \int h_\lambda^0 \sin^2 \theta \frac{\partial \delta r / R}{\partial \theta} d\theta d\phi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\partial h_\lambda^0}{\partial \mu} \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial \delta r / R}{\partial \theta} d\theta d\phi + \frac{1}{2\pi} \int \int h_\lambda^0 \frac{\delta \mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_\lambda^0} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int \int (\delta h_\lambda^2 + \delta h_\lambda^3) \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi.\end{aligned}$$

## Lokalna zmiana strumienia

$$\frac{\delta \mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_\lambda^0} = \frac{\partial \log \mathcal{F}_\lambda^0}{\partial \log T_{\text{eff}}^0} \frac{\delta T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}} + \frac{\partial \log \mathcal{F}_\lambda^0}{\partial \log g^0} \frac{\delta g}{g^0} = \alpha_T(\lambda) \frac{\delta T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}} + \alpha_g(\lambda) \frac{\delta g}{g^0}.$$

gdzie

$$\frac{\delta T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}^0} = \varepsilon \frac{1}{4} \text{Re}\{f Y_\ell^m e^{-i\omega t}\},$$

$$\frac{\delta g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}^0} = - \left( 2 + \frac{3\omega^2}{4\pi G \langle \rho \rangle} \right) \frac{\delta r}{R},$$

## ZMIANA STRUMIENIA MONOCHROMATYCZNEGO

$$\frac{\Delta \mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_\lambda^0} = \varepsilon Y_\ell^m(i, 0) b_\ell^\lambda \operatorname{Re}\{[D_{1,\ell}^\lambda + D_{2,\ell} + D_{3,\ell}^\lambda] e^{-i\omega t}\},$$

gdzie

$$D_{1,\ell}^\lambda = \frac{1}{4} f \frac{\partial \log(\mathcal{F}_\lambda |b_\ell^\lambda|)}{\partial \log T_{\text{eff}}},$$

$$D_{2,\ell} = (2 + \ell)(1 - \ell),$$

$$D_{3,\ell}^\lambda = - \left( \frac{3\omega^2}{4\pi G \langle \rho \rangle} + 2 \right) \frac{\partial \log(\mathcal{F}_\lambda |b_\ell^\lambda|)}{\partial \log g_{\text{eff}}^0}$$

**$D_1$**  – zmiany jasności i pociemnienia brzegowego  
wynikające ze zmian temperaturowych

**$D_2$**  – zmiany geometryczne

**$D_3$**  – zmiany jasności i pociemnienia brzegowego  
wynikające ze zmian przyspieszenia grawitacyjnego  
(ciśnienia)

**Do wyliczenia pochodnych strumienia po temperaturze i grawitacji:  $\alpha_T(\lambda)$ ,  $\alpha_g(\lambda)$ , oraz pociemnienia brzegowego i jego pochodnych korzystamy z modeli atmosfer gwiazdowych, np:**

**modele Kurucza (std, NOVER, NEWODF)**

**PHEONIX (Peter Hauschildt ) – uwzględniają linie molekuł**

**NEMO2003 (zespół z Uniwersytetu Wiedeńskiego)  
– uwzględniają konwekcję turbulentną**

**BSTAR2006 – modele atmosfer NLTE TLUSTY**

Pochodne  $\alpha_T(\lambda)$  i  $\alpha_g(\lambda)$  dla trzech wartości  $T_{\text{eff}}$   
(modele atmosfer Kurucza)

$\log T_{\text{eff}}$	$\log g$	$atu$	$agu$	$atv$	$agv$	$atb$	$agb$	$aty$	$agy$
8000.	4.00	4.14097	0.07240	5.36410	-0.05720	4.59780	-0.03280	3.66940	-0.01320
15000.	4.00	3.03250	-0.01520	1.87891	-0.01160	1.73385	-0.00080	1.63714	-0.00200
24000.	4.00	2.76310	-0.04560	1.98943	-0.02560	1.88996	-0.02000	1.83470	-0.02320

**Ponadto dla pociemnienia brzegowego możemy skorzystać z przybliżeń analitycznych, np:**

**LINIOWE**

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u(1 - \mu)$$

**KWADRATOWE**

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - a(1 - \mu) - b(1 - \mu)^2$$

# Inne prawa pociemnienia brzegowego

## PIERWIASTKOWE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - c(1 - \mu) - d(1 - \sqrt{\mu})$$

## LOGARYTMICZNE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - e(1 - \mu) - f\mu \ln \mu$$

## NIELINIOWE

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - \sum_{k=1}^4 a_k (1 - \mu^{\frac{k}{2}})$$

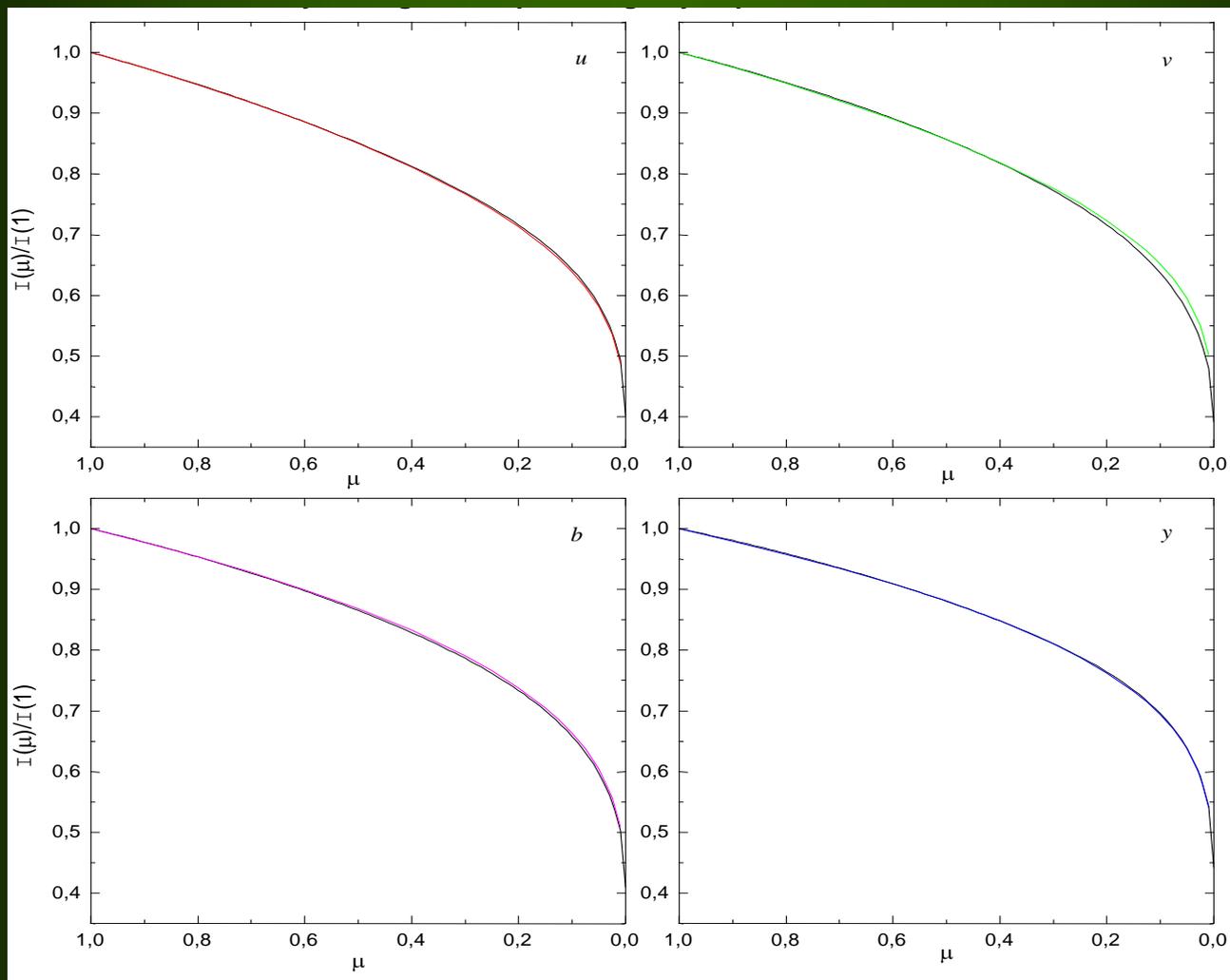
## DWUPARAMETRYCZNE (EKSPONENCJALNE)

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - g(1 - \mu) - \frac{h}{(1 - e^\mu)}$$

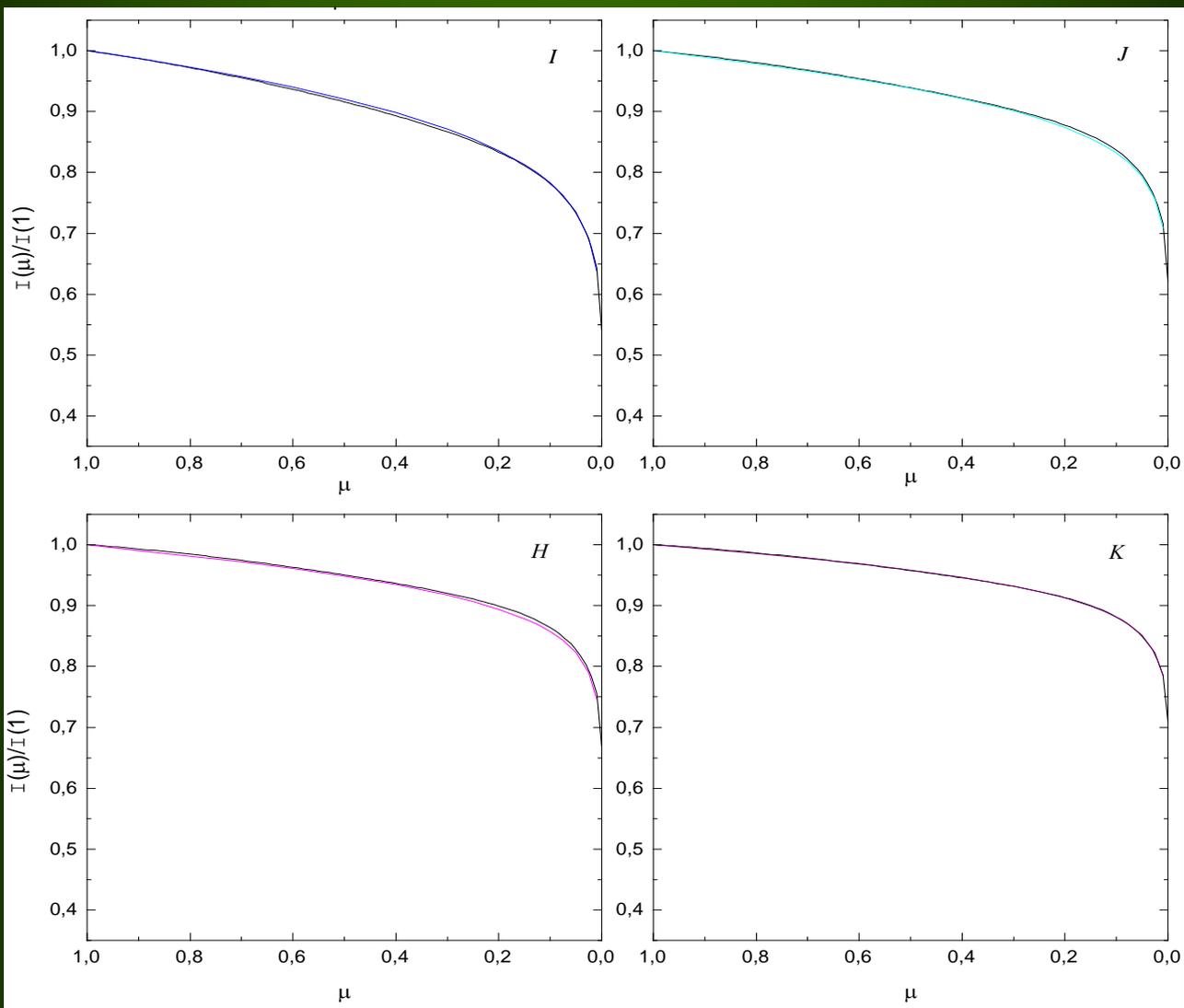
$\log T_{\text{eff}} = 25000$ ,  $\log g = 4.0$ ,  $[m/H] = 0.0$ ,  $\xi = 2$  km/s

$I(\mu)/I(1) = 1 - \sum_1^4 a_k (1 - \mu^{k/2})$  dla fotometrii uvby

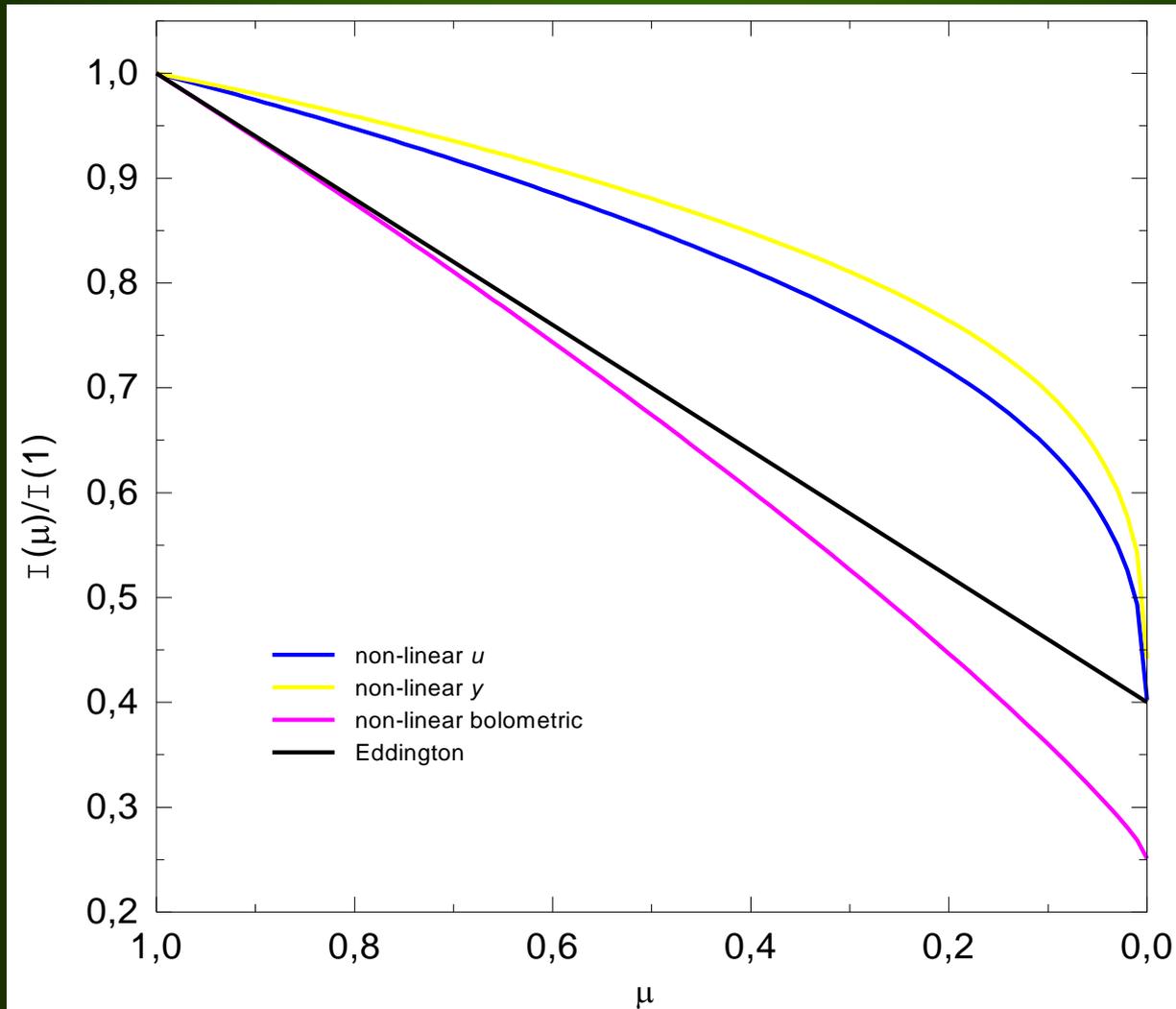
Kolorami wyrysowane są dokładne wartości  $I(\mu)/I(1)$  z modeli Kurucza



# To samo dla fotometrii Johnsona IJHK



# prawo nieliniowe w pasmach $u$ i $y$ , bolometryczne oraz Eddingtona



## POLE PRĘDKOŚCI PULSACJI

Pole prędkości znajdziemy licząc pochodną po czasie przesunięcia Lagrange'a we współrotującym układzie odniesienia

$$\frac{d\vec{\xi}_{nlm}(r'', \theta'', \phi'', t)}{dt} = \frac{\partial \vec{\xi}_{nlm}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\xi}_{nlm}}{\partial r''} \frac{\partial r''}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\xi}_{nlm}}{\partial \theta''} \frac{\partial \theta''}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\xi}_{nlm}}{\partial \phi''} \frac{\partial \phi''}{\partial t},$$

$$\vec{v}_{puls} = \Re\{i\omega_{nlm}\vec{\xi}_{nlm}(r'', \theta'', \phi'', t)\}.$$

## Lokalna zmiana promienia związana z modem oscylacji

$$\delta r = \varepsilon R \Re \left[ \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k} Y_{\ell}^k(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \right]$$

składowa prędkości w kierunku  $r$  przy zaniedbaniu rotacji

$$v_r = \frac{\partial \delta r}{\partial t}$$

$$v_r = -\varepsilon \omega \Im \left[ \sum_{k=-\ell}^{\ell} d_{\ell m k} Y_{\ell}^k(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \right]$$

zewewnętrzne warunki brzegowe prowadzą  
do wyrażenia na składową horyzontalną

$$\vec{v}_H \approx \alpha_H \vec{\nabla}_H v_r$$

$$\alpha_H = \frac{GM}{R^3 \omega^2} = \frac{1}{3\sigma^2}$$

$$v_\theta = \alpha_H \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \quad v_\phi = \frac{\alpha_H}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi},$$

**Wektor jednostkowy w kierunku obserwatora  $(\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ ,  
więc radialna składowa w układzie obserwatora wynosi**

$$v_{rad} = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$$

$$v_p = \vec{v}_{puls} \cdot (-\mathbf{e}_z) = -i\omega[\cos \theta \delta r - r \sin \theta \delta \theta] = -i\omega[\cos \theta \xi_r - \sin \theta \xi_\theta].$$

$$\xi_r = \delta r,$$

$$\xi_\theta = r \delta \theta,$$

$$\xi_\phi = r \sin \theta \delta \phi.$$

**Całkowita prędkość rzutowana na kierunek do obserwatora w danym miejscu na tarczy gwiazdy jest sumą prędkości pulsacji i rotacji**

$$v_{rad} = v_p - v_e \sin i \sin \theta \sin \varphi$$

**Prędkość radialna uśredniona po widzialnym dysku  
z uwzględnieniem pociemnienia brzegowego**

$$V_{rad} = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{rad}(\theta, \varphi) d\varphi \right] h(\mu) \mu d\mu = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_p(\theta, \varphi) d\varphi \right] h(\mu) \mu d\mu$$

## ZMIANY PRĘDKOŚCI RADIALNEJ

Po scałkowaniu dostaniemy

$$V_{rad} = -i\varepsilon\omega RN_l^0 d_{lm0}(i)(u_\ell + \alpha_H v_\ell)e^{-i\omega t}$$

$$u_\ell = \int_0^1 h\mu^2 P_\ell(\mu) d\mu,$$

$$v_\ell = \ell \int_0^1 h(P_{\ell-1} - \mu P_\ell)\mu d\mu,$$

$$u_\ell^\lambda = \frac{1}{2\ell + 1} [(\ell + 1)b_{\ell+1}^\lambda + \ell b_{\ell-1}^\lambda]$$

$$v_\ell^\lambda = \frac{\ell(\ell + 1)}{2\ell + 1} [b_{\ell-1}^\lambda - b_{\ell+1}^\lambda]$$

**Z obserwacji prędkość radialną pulsacji wyznaczamy jako pierwszy moment wybranej linii widmowej**

$$M_1 = \frac{\int (v - v_0) F(v) dv}{\int F(v) dv}$$

$v_0$  – odpowiada  $\lambda_0$

**Dla gwiazd znamy tylko uśrednione po tarczy  
charakterystyki modów oscylacji.**

**Prowadzi to do ograniczeń w obserwowalności modów  
wynikających z efektów uśredniania oraz kąta inklinacji.**

## EFEKTY UŚREDNIANIA

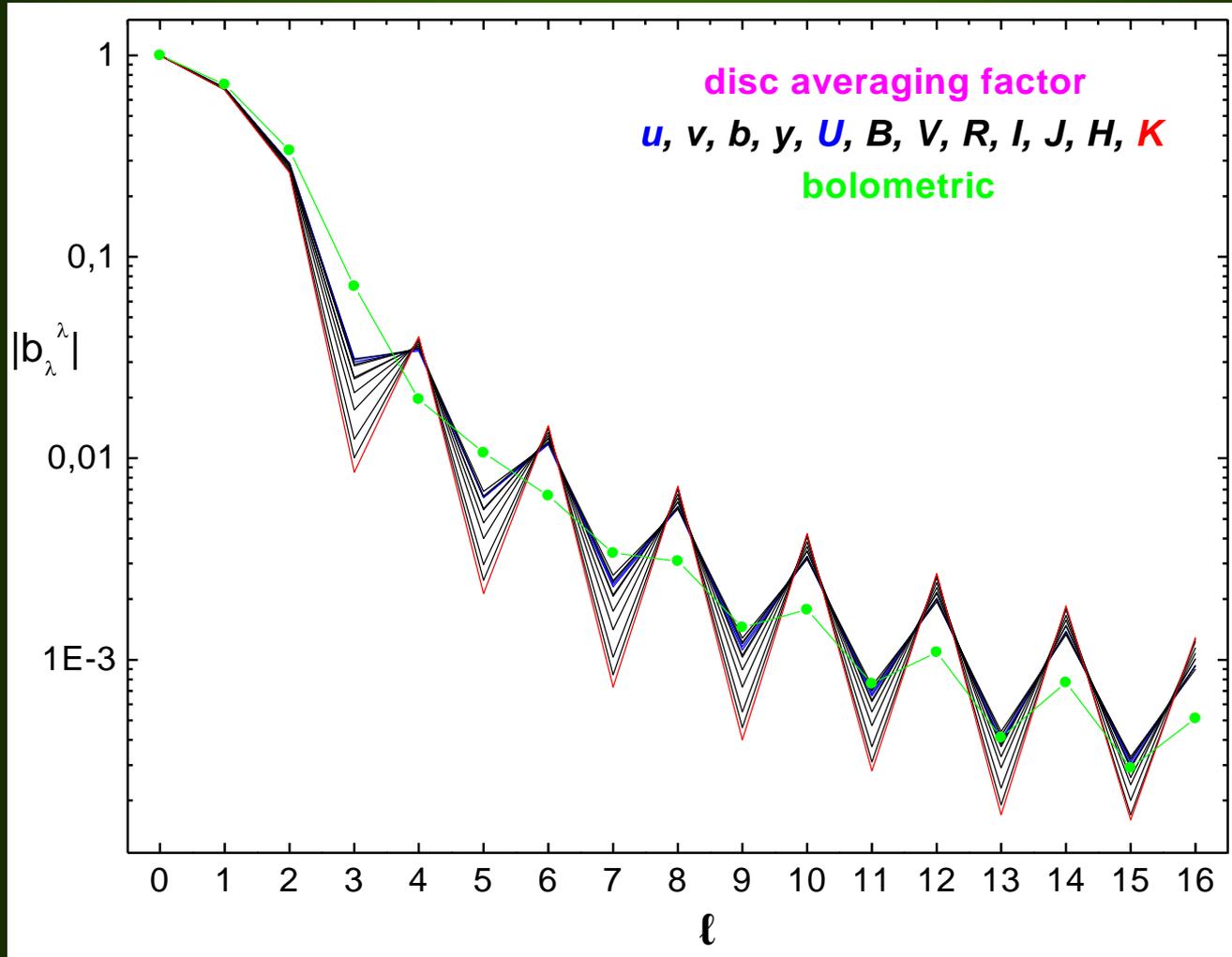
Całki  $b_\ell$ ,  $u_\ell$ ,  $v_\ell$  szybko maleją z rosnącym  $\ell$ .

$\ell$	$b_\ell$	$u_\ell$	$v_\ell$
0	1.0	0.708	0.0
1	0.708	0.550	0.450
2	0.325	0.321	0.775
3	0.0626	0.127	0.594
4	-0.0208	0.0234	0.156
5	-0.00782	-0.00521	-0.0117
6	0.00781	-0.00234	-0.0319
7	0.00234	0.00156	0.0437
8	-0.00391	0.00059	0.0141

**Efekty uśredniania w zmianach jasności opisuje czynnik  $b_\ell$  , zwany „the disc averaging factor”.**

**Przy obecnym poziomie detekcji z fotometrii naziemnej możemy wykryć tylko mody o  $\ell \leq 4$ .**

# czynnik uśredniania po dysku w różnych pasmach



Wyrażenia na  $b_\ell$ ,  $u_\ell$ ,  $v_\ell$  sprowadzają się do całek:

$$J_{\ell, k} = \int_0^1 \mu^k P_\ell d\mu$$

$$\int_0^1 \mu^k P_\ell(\mu) d\mu = \frac{1}{2^\ell} \sum_{n=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^n (2\ell - 2n)!}{n! (\ell - n)! (\ell - 2n)!} \cdot \frac{1}{\ell - 2n + k + 1}$$

Całki te znikają dla  $\ell > k$ , jeśli różnica  $\ell - k$  jest parzysta.

Jeśli jest nieparzysta, to dla  $\ell \rightarrow \infty$  mamy

$$J_{\ell, k} \rightarrow (-1)^{(\ell - k - 1)/2} k! \ell^{-(k+1.5)} (2/\pi)^{1/2}$$

Dlatego dla dużych  $\ell$  wartości  $b_\ell$ ,  $u_\ell$ ,  $v_\ell$  zależą od parzystości

$\ell$  parzyste

$$b_\ell = c_\ell / \ell^2 \quad u_\ell = -9c_\ell / \ell^4 \quad v_\ell = -3c_\ell / \ell^2$$

$$c_\ell = (-1)^{(\ell/2+1)} [2/(\pi \ell)]^{1/2}$$

$\ell$  nieparzyste

$$b_\ell = c_\ell / \ell^2 \quad u_\ell = 2c_\ell / (3\ell^2) \quad v_\ell = c_\ell / 3$$

$$c_\ell = (-1)^{(\ell/2+1)} [2/(\pi \ell)]^{1/2}$$

$b_l^\lambda$  w paśmie  $\gamma$ , nieliniowe  $h_\lambda(\mu)$  (Claret)

$b_l^\lambda$  -  $h(\mu)$  Eddingtona ( $h(\mu) = 1.5\mu + 1$ )

$b_l^\lambda$  -  $h(\mu)$  Eddingtona, wzór dla dużych  $\ell$

